目　　录

第一章　曲　　线

§1　向　　量

在三维欧氏空间 E^3 内取直角坐标系。当 E^3 的点 P 的坐标为 (x, y, z) 时，此点以 $P(x, y, z)$表示之。E^3 内的向量 $\boldsymbol{A}$ 的分量为 A_x，A_y，A_z 时，将 $\boldsymbol{A}$ 记做

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

对于 E^3 的一点 $P(x, y, z)$，对应以从原点 O 到 P 的向量 $\overrightarrow{OP}$，这个向量 $\overrightarrow{OP}$ 叫做点 P 的**位置向量**。点 $P(x, y, z)$ 的位置向量 $\boldsymbol{x}$ 可写做

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

二向量

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

的**内积** $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 与**外积** $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 分别是

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z,\quad \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} A_yB_z-A_zB_y \\ A_zB_x-A_xB_z \\ A_xB_y-A_yB_x \end{pmatrix}$$

关于三个向量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix}$，下式成立。

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

此式又可写如

$$|\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{C}|=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$$

向量$\boldsymbol{A}$之长（**或模**）由下式给定。

$$\|\boldsymbol{A}\|=\sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}=\sqrt{(A_x)^2+(A_y)^2+(A_z)^2}$$

设在区间I上定义的向量函数（其值为E^3的向量函数）$\boldsymbol{A}(t)$（$t\in I$）为

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix} A_x(t) \\ A_y(t) \\ A_z(t) \end{pmatrix} \quad (t\in I),$$

则其分量 $A_x(t)$，$A_y(t)$，$A_z(t)$ 为定义在I上的函数。如果三个函数 A_x，A_y，A_z 连续时，就说向量函数$\boldsymbol{A}$**连续**。如果 A_x，A_y，A_z 无限次可微分时，就说向量函数$\boldsymbol{A}$**无限次可微分**，$\boldsymbol{A}$叫做C^∞**向量函数**。一般来说无限次可微分函数叫做C^∞**函数**。以C^∞向量函数$\boldsymbol{A}$的分量的导函数为分量的向量函数

$$\boldsymbol{A}'=\begin{pmatrix} A_x' \\ A_y' \\ A_z' \end{pmatrix}$$

叫做向量函数$\boldsymbol{A}$的**导向量**（**函数**），用记号

$$\boldsymbol{A}',\quad \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}$$

表示。这时下式成立。

$$\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(t+h)-\boldsymbol{A}(t)}{h}$$

对于向量函数的微分法，普通函数的微分法里成立的规律，几乎全都成立。特别是下列规律成立：对二向量函数$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$的内积与外积有

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$$

【问题 1.1】 设 $\boldsymbol{A}$ 为单位 C^∞ 向量函数（长为 1 的向量叫做**单位向量**）．试证下列事实。

(1) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}'=0$。

(2) 如果 $\boldsymbol{A}'\neq 0$，那末 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}'$ 垂直。

模仿微分学定义 C^∞ 向量函数 $\boldsymbol{A}$ 的高阶导函数。$\boldsymbol{A}$ 的 n 阶导函数用记号

$$\boldsymbol{A}^{(n)},\quad \frac{d^n\boldsymbol{A}}{dt^n}$$

表示。将 C^∞ 向量函数 $\boldsymbol{A}$ 在 $t_0\in I$ 的周围台劳展开之，在 t_0 的某邻域内得

$$\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{A}(t_0)+\boldsymbol{A}'(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}''(t_0)(t-t_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n+\boldsymbol{R}_n$$

式中 $\boldsymbol{R}_n$ 为剩余项。

【问题 1.2】 关于 C^∞ 向量函数 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，试证下式。

(1) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}'=\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}\|'$

(2) $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}'-\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{B})'=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}''-\boldsymbol{A}''\cdot\boldsymbol{B}$

(3) $|\boldsymbol{ABC}|'=|\boldsymbol{A}'\boldsymbol{BC}|+|\boldsymbol{AB}'\boldsymbol{C}|+|\boldsymbol{ABC}'|$

对于两个以上自变量的向量函数也模仿普通微分法定义其连续性，可微性。此外，偏微分、全微分的记号也模仿微分法。

§2 曲　　线

开区间 I 在 E^3 里的映射 $\boldsymbol{x}: I\to E^3$ 叫做**曲线**，其中 $\boldsymbol{x}(t)$ 表示对于 $t(\in I)$，点 $P_t\in E^3$ 的**位置向量**。今设

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad (t\in I)$$

则表示此曲线的方程

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \quad (t\in I) \tag{2.1}$$

为**参数表示**。这时 t 叫做**参数**。当 $\boldsymbol{x}(t)(t\in I)$为 C^∞ 向量函数时，此曲线叫做 **C^∞ 曲线**。用方程

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t), \quad (t\in I)$$

或方程(2.1)表示这条曲线。C^∞ 曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ $(t\in I)$满足条件

$$\boldsymbol{x}'(t)\neq 0 \quad (t\in I) \tag{2.2}$$

时，叫做**正则曲线**，下列事实成立。

设 $\boldsymbol{x}:I\to E^3$ 为正则曲线，对于任意的 $t_0\in I$，取 t_0 的充分小邻域 $U(\subset I)$，则映射 $\boldsymbol{x}$ 在 U 内是1对1。

《**注意**》正则曲线 $\boldsymbol{x}:I\to E^3$ 于其定义域 I 全域上倒未必是1对1。如下图1.1自相交曲线也是正则曲线。

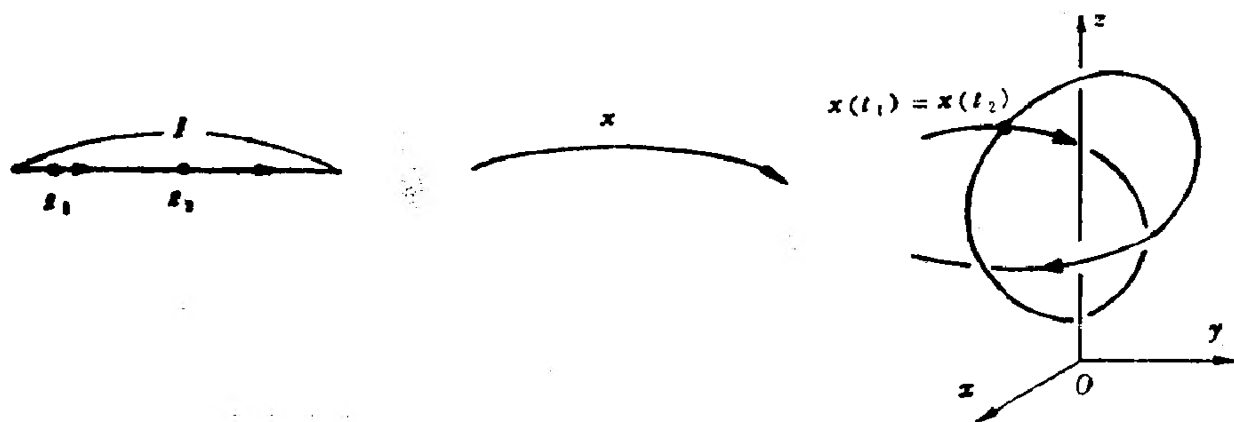


图 1.1

正则曲线的条件（2.2）的含义是：曲线 $\boldsymbol{x}:I\to E^3$ 的象（常识曲线）无尖点，而且当参数 t 变动时对应的点 $\boldsymbol{x}(t)$ 也运动。

就正则曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ $(t\in I)$而言，当 t 在区间 I 移动时，考虑相应的点 $\boldsymbol{x}(t)$ 在 E^3 中的运动，因此直观地说，正则曲线可以看做表示一条有向曲线。

给定**闭区间** I 在 E^3 中的映射 $\boldsymbol{x}:I\to E^3$，当存在含 I 的开区间 I^* 与正则曲线 $\boldsymbol{x}^*:I^*\to E^3$ 在 I 上 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}^*(t)$成立时，映射 $\boldsymbol{x}:I\to E^3$ 叫做在闭区间 I 上定义的**正则曲线**。当 $I=[a,b]$ 时，二点 $\boldsymbol{x}(a)$ 与 $\boldsymbol{x}(b)$ 叫做此正则曲线的**端点**。故今后假设曲线的定义域是开区间或闭区间。

当将区间 I^* 映射在区间 I 上的，I^* 上的 C^∞ 函数 $t=t(\theta)$ 满足条件

$$\frac{dt}{d\theta}>0 \quad (\theta\in I^*) \tag{2.3}$$

时，$t=t(\theta)$ 叫做参数的**容许变换**。

如果 $t=t(\theta)$为容许变换，则 $t=t(\theta)$将 I^* 1 对 1 地映射在 I 之上，又是增函数．故存在其反函数 $\theta=\theta(t)$，这是将 I 映射在 I^* 上的容许变换。

对于两条正则曲线 $\boldsymbol{x}:I\to E^3$ 与 $\boldsymbol{x}^*:I^*\to E^3$，假设存在将 I^* 映射在 I 上的容许变换 $t=t(\theta)$使$\boldsymbol{x}(t(\theta))=\boldsymbol{x}^*(\theta)$成立。这时，说 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}^*$ 等价，以 $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{x}^*$ 记之。这个等价关系～是在正则曲线全体的集中定义的，是一种等价关系。将正则曲线全体的集以此等价关系分类，考虑得到的等价类，于是得直观上有向的曲线。对这种含义下的有向曲线进行研究是本章的目的。故在前面定义的正则曲线的性质之中只处理在参数的容许变换下不变的性质，就可达到这种目的。因此，我们规定今后在正则曲线的性质中只考虑在容许变换下不变的。

《**注意**》设区间 I^* 在区间 I 上的映射可用 I^* 上的 C^∞ 函数 $t=t(\theta)$表示，如不是满足条件(2.3)而是满足

$$\frac{dt}{d\theta}<0 \quad (\theta\in I^*) \tag{2.4}$$

利用它来变换正则曲线的参数，则正则曲线改变方向。

当正则曲线 $\boldsymbol{x}:I\to E^3$ 不含重点时，即对于 $t_1\neq t_2$ $(t_1,\ t_2\in I)$ 若 $\boldsymbol{x}(t_1)\neq\boldsymbol{x}(t_2)$时，则此正则曲线叫做**简单正则曲线**。

【问题 2.1】 既使在容许变换下改变参数，简单正则曲线的定义

并不改变，试证明之。

对于正则曲线 $\boldsymbol{x}: I \to E^3$，取 I 的子闭区间 $I^* = [a, b]$，则正则曲线 $\boldsymbol{x}: I^* \to E^3$ 叫做**正则弧**或给定正则曲线的**弧**。

对于正则曲线 $\boldsymbol{x}: I \to E^3$，其象 $\boldsymbol{x}(I)$ 为 E^3 的子集，在直观意义下，做为图形，形成曲线。因此，做为图形的曲线叫做正则曲线和做为映射的正则曲线有时用语相同。还有，做为图形的曲线上的点有时只叫做正则曲线 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ 上的点。对于正则弧与弧有时也用相同的用语。

弧长 以 C 表示正则弧 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$。考虑闭区间 $[a, b]$ 的分割

$$\varDelta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

与此分割的各分点相对应的 E^3 的点分别设为

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0), \quad \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}(t_1), \quad \cdots, \quad \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}(t_n)$$

设依次连结这些点而得折线 Γ_n 之长为 $L(\Gamma_n)$，则

$$L(\Gamma_n) = \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}\|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{x}(t_i) - \boldsymbol{x}(t_{i-1})\|$$



图 1.2

如所周知，上面给定的分割 $\varDelta$ 以任何方式分细时，$L(\Gamma_n)$ 总收敛于确定的数值 $L(C)$。这时，我们说弧 C 的**弧长**是 $L(C)$，弧 C **具有弧长**。下列定理成立。

定理 1.1 正则弧（曲线）$C: \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ 具有弧长，其弧长 $L(C)$ 由下式给定。

$$L(C) = \int_a^b \left\| \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \right\| dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (2.5)$$

〈证明〉 证明请参照微积分学。

在正则弧 $C: \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)\quad(a\leqslant t\leqslant b)$里，作参数的容许变换 $t=t(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$而得的正则弧设为 $\overline{C}: \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t(\theta))$，则

$$L(\overline{C})=\int_{\alpha}^{\beta}\left\|\frac{d\boldsymbol{x}}{d\theta}\right\|d\theta=\int_{a}^{b}\left\|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\frac{dt}{d\theta}\right\|\frac{d\theta}{dt}dt$$

然因 $dt/d\theta>0$，故

$$L(\overline{C})=\int_{a}^{b}\left\|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right\|\frac{dt}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}dt=\int_{a}^{b}\left\|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right\|dt=L(C)$$

即正则弧 C 的弧长 $L(C)$在参数的容许变换下是不变的。在这种含义下可以说正则弧长具备几何学意义。又当给定欧氏空间 E^3 的**合同变换**（在映射 $T: E^3\to E^3$ 之下，任意两点间的距离保持不变）时，可从正则弧 $C: \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)\quad(t\in I)$ 作出正则弧 $\overline{C}: \boldsymbol{x}=T(\boldsymbol{x}(t))$。这个 $\overline{C}$ 叫做在合同变换T之下移动C而得的曲线。由弧长的定义知，C 的弧长 $L(C)$ 与 $\overline{C}$ 的弧长 $L(\overline{C})$ 相等。即弧长在 E^3 中的合同变换下是不变的。总之可以说，合同的正则弧具有相同的弧长。

考虑正则曲线 $C: \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)\quad(t\in I)$。取常数 $t_0\in I$，令

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}\left\|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right\|dt,\quad(t\in I)\tag{2.6}$$

则 $s=s(t)$是区间 I 上的 C^∞ 函数而且

$$\frac{ds(t)}{dt}=\left\|\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}\right\|>0\quad\left(\because\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\neq 0\right)$$

今设 $I=[a,\ b]$，$s(a)=\alpha$，$s(b)=\beta$，则 $s=s(t)$ 为参数的容许变换，将反函数 $t=t(s)$代入 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$，得正则曲线 $\overline{C}: \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t(s))$，$(s\in[\alpha,\ \beta])$。这个参数 $s\in[\alpha,\ \beta]$叫做给定正则曲线 C 的**弧长**。正则曲线 $\overline{C}$ 就是给定正则曲线 C 以弧长 s 为参数表达。

如果设正则曲线 C 的参数为弧长 s，则 C 可用 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$表示。于是在(2.6)中以 $t=s$ 代入之得

$$s=\int_{0}^{s}\left\|\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\right\|ds$$

在上式中对 s 微分两边得

$$\left\|\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\right\| = 1 \tag{2.7}$$

即在曲线上的各点，与曲线相切的向量 $d\boldsymbol{x}/ds$ 是单位向量。

【问题 2.2】 对于正则曲线，如果二参数 s 与 $\bar{s}$ 都是其弧长时，则 $\bar{s} = s + a$ （a 为常数）．试证明之。

§3 曲率 挠率

切向量 当给定正则曲线 $C: \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ $(t \in I)$ 时，向量

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$$

在曲线 C 的点 $\boldsymbol{x}(t)$ 处切于 C。因此，$\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ 叫做**切向量**。设曲线 C 关于弧长 s 的参数表示为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s)$，则由(2.7)可见

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{x}'(s) = \frac{d\boldsymbol{x}}{ds}, \quad \boldsymbol{t} = \frac{\dot{\boldsymbol{x}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|}$$

为单位向量，叫做**单位切向量**，以记号 $\boldsymbol{t}$ 记之。

规定 沿曲线 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ 定义的函数（或向量函数）$f(t)$ 对 t 的导函数以 $\dot{f}(t)$表示。为了区别，f 对弧长 s 的导函数以 f' 表示。

通过 C 上的点 $\boldsymbol{x}(t)$，垂直于此点处的切向量的平面叫做在此点处的**法平面**。

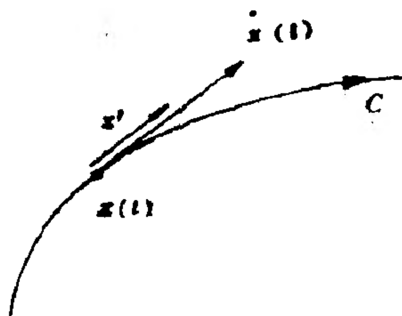


图 1.3

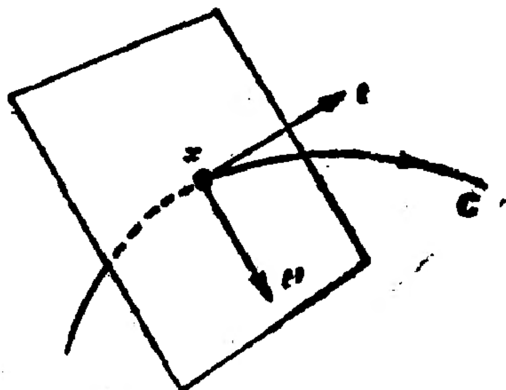


图 1.4

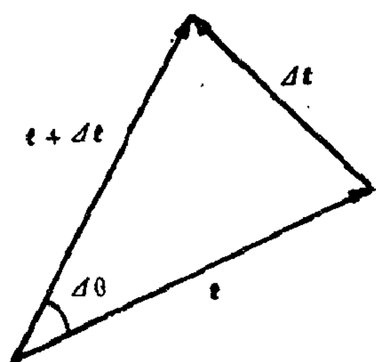
曲率　法向量　其次，考虑

$$\boldsymbol{t}' = \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \frac{d^2\boldsymbol{x}}{ds^2} \tag{3.1}$$

因 $\boldsymbol{t}$ 之长为1，所以 $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}'=0$。即在 $\boldsymbol{t}'\neq 0$ 的点，$\boldsymbol{t}'$ 在法平面上。此 $\boldsymbol{t}'$ 叫做曲线 C 的**曲率向量**。设

$$\kappa(s) = \|\boldsymbol{t}'(s)\| = \|\boldsymbol{x}''(s)\|$$
$$= \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2} \tag{3.2}$$

函数 $\kappa(s)$ 叫做曲线 C 的**曲率**。从图 1.5 可见，κ 为单位向量 $\boldsymbol{t}$ 对弧长 s 的回转率。即切线方向变化快处曲率 κ 大。



$\|\Delta t\| \doteqdot \Delta\theta$

图 1.5

在 $\kappa\neq 0$ 的点，令

$$\rho = \frac{1}{\kappa} \tag{3.3}$$

ρ 叫做**曲率半径**。在 $\kappa=0$ 的点定义 $\rho=\infty$。$\kappa=0$ 的点叫做**拐点**。

定理 1.2　曲率 κ 恒等于 0 的曲线是直线或直线的一部分。

〈**证明**〉　因 $\kappa=0$ 恒成立，故 $\boldsymbol{x}''=0$ 恒成立。因此得

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}s + \boldsymbol{b}$$

式中 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为常向量。（证毕）

公式　对于有任意参数 t 的正则曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$，

$$\kappa = \frac{\|\dot{\boldsymbol{x}}\times\ddot{\boldsymbol{x}}\|}{\|\dot{\boldsymbol{x}}\|^3} \tag{3.4}$$

〈**证明**〉

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \boldsymbol{x}'\dot{s}$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}'\dot{s}) = \boldsymbol{x}'\ddot{s} + \boldsymbol{x}''(\dot{s})^2$$

$$\therefore\quad \dot{\boldsymbol{x}}\times\ddot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}'\dot{s})\times(\boldsymbol{x}'\ddot{s} + \boldsymbol{x}''(\dot{s})^2) = (\dot{s})^3\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{x}''$$

然因 $\dot{s}=ds/dt=\|\dot{\boldsymbol{x}}\|$。故

$$\dot{\boldsymbol{x}} \times \ddot{\boldsymbol{x}} = \|\dot{\boldsymbol{x}}\|^3 \boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{x}''$$

又因 $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{x}'$ 与 $\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{x}''$ 互相垂直，$\|\boldsymbol{x}'\| = 1$，$\kappa = \|\boldsymbol{x}''\|$，故 $\kappa = \|\boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{x}''\|$。从而由上式得次式。

$$\kappa = \frac{\|\dot{\boldsymbol{x}} \times \ddot{\boldsymbol{x}}\|}{\|\dot{\boldsymbol{x}}\|^3} \qquad \text{（证毕）}$$

再者，在 $\kappa \neq 0$ 的点，令

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{x}''}{\kappa}, \quad \boldsymbol{x}'' = \kappa \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{t}' = \kappa \boldsymbol{n} \tag{3.5}$$

则此 $\boldsymbol{n}$ 为单位向量，$\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{t}$ 垂直。$\boldsymbol{n}$ 叫做**单位主法向量**。在 $\kappa = 0$ 的点不能定义 $\boldsymbol{n}$。故对于直线，$\boldsymbol{n}$ 是不定的。

挠率　法向量　假设在正则曲线 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s)$ 上不存在 $\kappa = 0$ 的点（在 $\kappa = 0$ 的点，下述性质并不成立）。设单位切向量为 $\boldsymbol{t}$，单位主法向量为 $\boldsymbol{n}$，令

$$\boldsymbol{b}(s) = \boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{n}(s) \tag{3.6}$$

则 $\boldsymbol{b}$ 叫做**单位副法向量**。这时，在曲线的各点 $\boldsymbol{x}$ 能作互相正交的单位向量 $\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}$ 并作成右手系如图 1.6 所示。它们随着点 $\boldsymbol{x}$ 的移动而运动。故称组（$\boldsymbol{x}$;$\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}$）为**活动标架**或**弗雷内标架**。微分 $\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}$，令

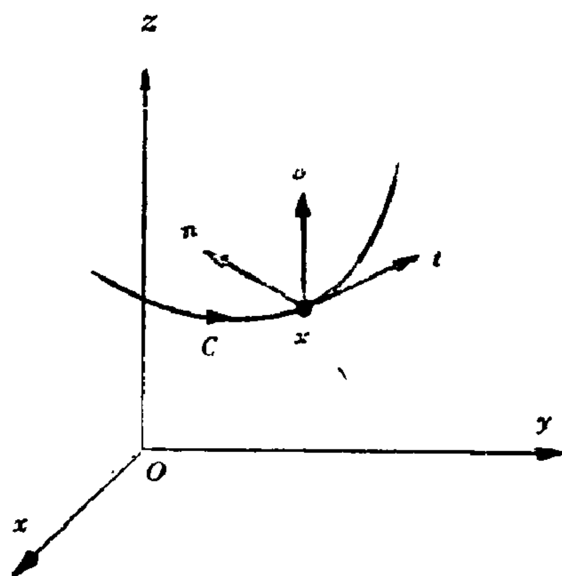


图 1.6

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}' &= a_{11}\boldsymbol{t} + a_{12}\boldsymbol{n} + a_{13}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{n}' &= a_{21}\boldsymbol{t} + a_{22}\boldsymbol{n} + a_{23}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}' &= a_{31}\boldsymbol{t} + a_{32}\boldsymbol{n} + a_{33}\boldsymbol{b} \end{aligned} \tag{3.7}$$

然而

$$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = 1, \quad \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{t} = 0$$

成立。在上列方程中，求各边的微分可得下式。

$$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}'=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}'=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}'=0$$

$$\boldsymbol{t}'\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n}'=\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{t}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{t}'=0$$

将 (3.7) 代入这些式中，分别得

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=0$$

$$a_{12}+a_{21}=a_{23}+a_{32}=a_{31}+a_{13}=0$$

然由(3.5)得 $a_{12}=\kappa$，$a_{13}=0$，故令 $a_{23}=\tau$，则(3.7)可写如

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{t},\quad\begin{cases}\boldsymbol{t}'= & \kappa\boldsymbol{n} & \\ \boldsymbol{n}'=-\kappa\boldsymbol{t} & & +\tau\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}'= & -\tau\boldsymbol{n} & \end{cases}\tag{3.8}$$

这是表达 $\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}$ 变化状态的方程，叫做**弗雷内方程（公式）**。上面定义的 $\tau=\tau(s)$叫做曲线的**挠率**。因为 $\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{t}$ 与 $\boldsymbol{n}$，故由 (3.8) 的第三式可见，τ 表示 $\boldsymbol{t}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 所决定平面（叫做**密切平面**）的回转率。

公式 对于以弧长 s 为参数的正则曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$，如果 $\kappa\neq0$，则

$$\tau=\frac{1}{\kappa^2}|\boldsymbol{x}'\ \boldsymbol{x}''\ \boldsymbol{x}'''|=\frac{1}{\kappa^2}\begin{vmatrix}x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\\ x''' & y''' & z'''\end{vmatrix}\tag{3.9}$$

〈**证明**〉 从方程 (3.8) 的第 3 式得

$$\tau=-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}'=-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n})'$$

$$=-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{t}'\times\boldsymbol{n}+\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}')=|\boldsymbol{t}\ \boldsymbol{n}\ \boldsymbol{n}'|$$

然因 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{t}'/\kappa$，故

$$\boldsymbol{n}'=\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{t}''+\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\boldsymbol{t}'=\frac{1}{\kappa}\ \boldsymbol{x}'''+\kappa\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\boldsymbol{n}$$

将此式代入上式得

$$\tau=\left|\boldsymbol{t}\ \ \boldsymbol{n}\ \ \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{x}'''\right|=\left|\boldsymbol{x}'\ \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{x}''\ \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{x}'''\right|=\frac{1}{\kappa^2}|\boldsymbol{x}'\ \boldsymbol{x}''\ \boldsymbol{x}'''|\quad\text{（证毕）}$$

公式 对于有任意参数 t 的正则曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$，如果 $\kappa\neq0$，则

$$\tau=\frac{1}{\kappa^2}\frac{|\dot{\boldsymbol{x}}\ \ddot{\boldsymbol{x}}\ \dddot{\boldsymbol{x}}|}{\|\dot{\boldsymbol{x}}\|^6}\tag{3.10}$$

〈**证明**〉 $\boldsymbol{x}'=\dot{\boldsymbol{x}}t'$， $\boldsymbol{x}''=\dot{\boldsymbol{x}}t''+\ddot{\boldsymbol{x}}(t')^2$

$$x''' = \dot{x}t''' + 3\ddot{x}t't'' + \dddot{x}(t')^3$$

$$\therefore \quad |x' \; x'' \; x'''| = |\dot{x}t' \;\; \dot{x}t'' + \ddot{x}(t')^2 \;\; \dot{x}t''' + 3\ddot{x}t't'' + \dddot{x}(t')^3|$$

$$= (t')^6 |\dot{x} \; \ddot{x} \; \dddot{x}| = \frac{1}{\|\dot{x}\|^6} |\dot{x} \; \ddot{x} \; \dddot{x}|$$

将此式代入 (3.9) 中，则得

$$\tau = \frac{1}{\kappa^2} \frac{|\dot{x} \; \ddot{x} \; \dddot{x}|}{\|\dot{x}\|^6} \qquad \text{（证毕）}$$

定理 1.3 设一正则曲线不含 $\kappa = 0$ 的点，则此正则曲线为平面曲线的充要条件是 $\tau = 0$ 恒成立。

〈证明〉 必要性 假设此曲线为平面曲线，那末可设此曲线在 xy 平面上。即可设此曲线的参数表示为 $x = x(s)$，$y = y(s)$，$z = 0$。将此参数表示代入(3.9)，则得 $\tau = 0$。

充分性 假设 $\tau = 0$ 恒成立，则由 (3.9) 得

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0$$

故存在可微分函数 α，β，γ 使得下式成立。

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma z' = 0, \qquad \alpha x'' + \beta y'' + \gamma z'' = 0,$$

$$\alpha x''' + \beta y''' + \gamma z''' = 0$$

微分第一式与第二式，运用第二式与第三式得

$$\alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z' = 0, \qquad \alpha' x'' + \beta' y'' + \gamma' z'' = 0$$

从这些式子和前面给定的前二式（假设此曲线不是直线）得

$$\alpha : \beta : \gamma = \alpha' : \beta' : \gamma'$$

故存在常数 a，b，c 满足

$$\alpha : \beta : \gamma = a : b : c$$

故

$$ax' + by' + cz' = 0$$

$$\therefore \quad ax + by + cz = d \quad (d \text{ 为常数}) \qquad \text{（证毕）}$$

【问题 3.1】 试证**正螺线** $x = a\cos t$，$y = a\sin t$，$z = bt$（$-\infty <$

$t<\infty$)，(a，b 为常数）的曲率 κ 与挠率 τ 分别为下列常数。

$$\kappa=\frac{a}{a^2+b^2},\quad \tau=\frac{b}{a^2+b^2}$$

【问题 3.2】 关于曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$，试证下式。

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{t}+\kappa v^2\boldsymbol{n},\qquad v=\left\|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right\|$$

（如果 t 表示时间，那末 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$表示点运动。这时，上式表示加速度是 $\boldsymbol{t}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的线性组合，并且指出加速度的切线分量与法线分量）。

例 3.1 当正则曲线的切线总与定方向夹定角时，称之为**定斜曲线**。正则曲线（设在各点 $\kappa\neq0$）为定斜曲线的充要条件是 τ/κ 一定。试证明之。

〈**解答**〉 设正则曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$（设弧长 s 为参数）为定斜曲线，并设关于一个定单位向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{a}=\cos\alpha$（一定）成立。微分 $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{a}=\cos\alpha$ 的两边，运用弗雷内公式(3.8)，则

$$\kappa\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=0,\qquad \therefore\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=0\ (\because\ \kappa\neq0)$$

即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直，于是 $\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{t}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的线性组合。故可令

$$\boldsymbol{a}=(\cos\alpha)\boldsymbol{t}\pm(\sin\alpha)\boldsymbol{b}$$

此式两边以 s 微分之，运用弗雷内公式得

$$0=(\kappa\cos\alpha\mp\tau\sin\alpha)\boldsymbol{n}$$

$$\therefore\quad \frac{\tau}{\kappa}=\pm\cot\alpha=\text{一定}$$

反之，设 τ/κ 是一定的，令 $\tau/\kappa=\cot\alpha$，$\boldsymbol{u}=(\cos\alpha)\boldsymbol{t}+(\sin\alpha)\boldsymbol{b}$。微分 $\boldsymbol{u}$，并运用弗雷内公式（3.8）得

$$\boldsymbol{u}'=(\kappa\cos\alpha-\tau\sin\alpha)\boldsymbol{n}=0$$

故 $\boldsymbol{u}$ 为一定的单位向量，$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}=\cos\alpha$。于是，此曲线为定斜曲线。（证毕）

平面曲线 对平面曲线的处理与空间曲线的情况有稍许不同之处，因此叙述平面曲线。

关于平面上的直角坐标系，设正则曲线的方程用参数 s 表示为

$x=x(s)$，$y=y(s)$，令

$$\boldsymbol{x}(s)=\begin{pmatrix}x(s)\\y(s)\end{pmatrix}$$

单位切向量 $\boldsymbol{t}$ 由

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{x}'$$

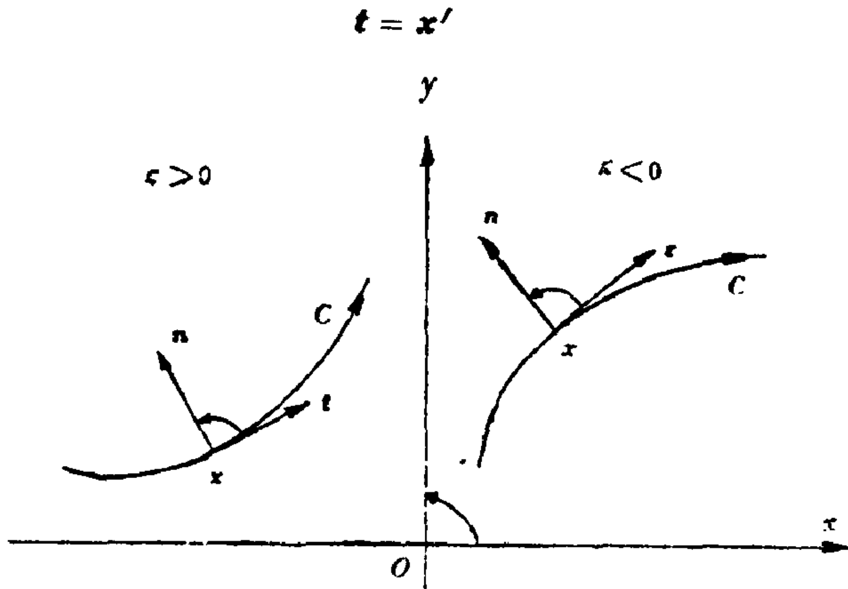


图 1.7

定义。在曲线的各点 $\boldsymbol{x}(s)$上，考虑与 $\boldsymbol{t}(s)$垂直的单位向量 $\boldsymbol{n}$ 使之与 $\boldsymbol{t}$ 成右手系。这样一来，在曲线上的各点 $\boldsymbol{x}$，决定互相垂直的二单位向量 $\boldsymbol{t}$ 与 $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{t}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 作成右手系。组（$\boldsymbol{x}$；$\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{n}$）叫做平面曲线的**活动标架**或**弗雷内标架**。这种活动标架的作法与空间曲线的活动标架的作法不同。即

$$\text{如果}\quad \boldsymbol{t}=\begin{pmatrix}t_x\\t_y\end{pmatrix},\ \text{则}\ \boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}-t_y\\t_x\end{pmatrix}$$

因 $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}=1$，故 $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}'=0$。从而可以表示为

$$\boldsymbol{t}'=\kappa\boldsymbol{n} \tag{3.11}$$

式中 κ 为 s 的 C^∞ 函数 $\kappa(s)$，叫做曲线的**曲率**。此曲率 κ 如图 1.7 所示，具有符号。

因为 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=1$，$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n}=0$，故微分之分别得 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}'=0$，$\boldsymbol{t}'\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n}'=0$。将(3.11)代入这些式内得 $\boldsymbol{n}'=-\kappa\boldsymbol{t}$。整理之得平面曲线的**弗雷内公式**

$$x' = t, \quad \begin{cases} t' = \kappa n \\ n' = -\kappa t \end{cases} \tag{3.12}$$

（请注意对于空间曲线，曲率 $\kappa \geqslant 0$）

令

$$t = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

则 θ 为 s 的 C^∞ 函数，θ 为单位切向量 t 与 x 轴的夹角。把上式代入弗雷内公式(3.12)得下式。

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} \tag{3.13}$$

$$\therefore \quad \theta = \int_0^s \kappa(s)ds + \theta_0 \quad (\theta_0 \text{ 为常数}) \tag{3.14}$$

再运用 $x' = t$，则

$$x = \int_0^s \cos\theta(s)ds + a, \quad y = \int_0^s \sin\theta(s)ds + b \tag{3.15}$$

$$(a, \ b \text{ 为常数})$$

这是给定曲线的参数方程。故以下事实成立：设已知曲率 κ 为弧长 s 的 C^∞ 函数 $\kappa(s)$，则曲线的方程由(3.15)决定。从而，预先给定对应于 $s=0$ 的点 $(a, \ b)$ 的 t 与 x 轴的夹角 θ_0，则曲线唯一地决定。

【问题 3.3】 如果二正则平面曲线关于弧长 s 以相同的 C^∞ 函数 $\kappa = \kappa(s)$ 为曲率，试证它们必合同。（运用(3.14)，(3.15)以及三角函数的加法定理）

【问题 3.4】 运用〔问题 3.3〕，证明以下事实。如果预先给定弧长 s 的 C^∞ 函数 $\kappa = \kappa(s)$，则存在以 $\kappa(s)$ 为曲率的平面曲线，而且除了合同变换外唯一地决定。

从〔问题 3.4〕的结论可见，除了合同变换外，平面曲线由其曲率 $k(s)$ 唯一地决定，故称方程

$$\kappa = \kappa(s)$$

为平面曲线的**自然方程**（参照下节 § 4

【问题 3.5】 试证 C^∞ 函数 $y = f(x)$ 的图形的曲率 κ 可由下式表

达。

$$\kappa=\frac{f''(x)}{[1+f'(x)]^{3/2}}$$

卵形线 弗雷内公式描述曲线的切线与法线等的变化率，但利用它能够导出曲线的整体性质，即大范围性质．做为一例，考虑卵形线。对于正则曲线 $\boldsymbol{x}:(-\infty,\infty)\to E^3$（或欧氏平面 E^2），设存在正数 L' 使 $\boldsymbol{x}(s+L')=\boldsymbol{x}(s)$ $(-\infty<s<\infty)$ 成立，在具有这种性质的正数 L' 中最小者为 L。这时，此曲线 C 叫**正则闭曲线**，L 叫闭曲线 C 之**长**。当平面上的简单正则闭曲线 C 所包围的域 D 中任意两点连线全含于 D 中时，那末 C 叫做**卵形线**。

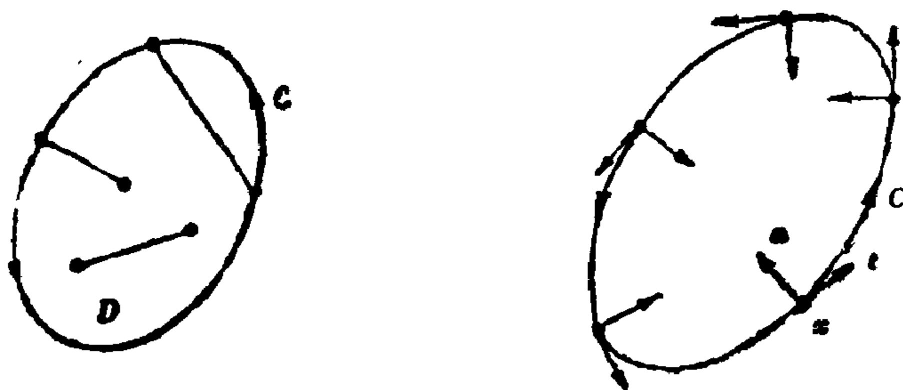


图 1.8

给定卵形线 C，设其曲率为 $\kappa(s)$．C 的弗雷内标架如图 1.8 的右图所示。取卵形线上的任意点，延长该点处的 $\boldsymbol{t}$ 与 $\boldsymbol{n}$，取直角坐标系如图 1.9 所示，设 C（在此点附近）可由方程 $y=f(x)$ 表示，则在各点，$f''\geqslant 0$（因 C 为卵形线，故函数 $f(x)$ 为凸函数。从而，于此点 $f''\geqslant 0$)。因此，运用〔问题 3.5〕知于此点的曲率 $\kappa\geqslant 0$。即

(a) 在卵形线的各点，$\kappa(s)\geqslant 0$。

(b) 卵形线上不同点 P，Q 的连结线段 $\overline{PQ}$ 在卵形线上或与 P 与 Q 间的弧 $\widehat{PQ}$ 迭合，或 $\overline{PQ}$ 与 $\widehat{PQ}$ 除二点 P，Q 以外不相交。

在卵形线上的点

$$\kappa'=0$$

时，称此点为**顶点**。我们来证明下列定理。

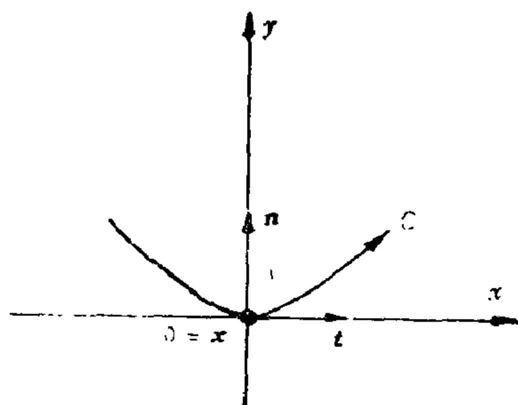


图 1.9

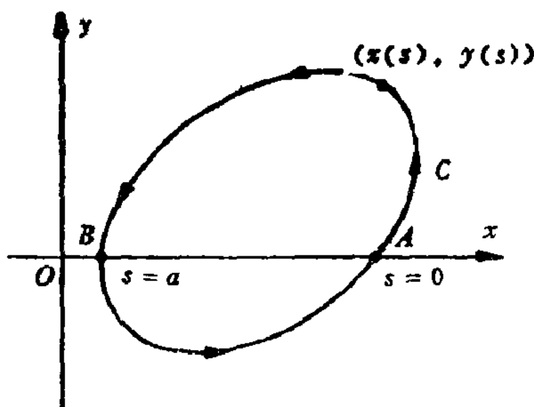


图 1.10

定理 1.4 在卵形线上至少有四个顶点。

〈**证明**〉 设卵形线 C 不是圆（在圆上 $\kappa(s)=\pm 1$，故各点都是顶点）。此外，设卵形线不含线段为其弧（如卵形线的一部分为线段，于此线段上 $\kappa(s)$ 一定，$\kappa'(s)=0$，故此线段上的点全是顶点）。在以上假设之下，$\kappa(s)$为非常数连续周期函数（周期为卵形线之周长 L），故在C上存在不同点A与B，于此处 $\kappa(s)$ 分别为最大，最小。因在A，B处$\kappa'(s)=0$，故A与B为顶点。

如果假设除A与B外无顶点，则

$$\kappa'(s)<0 \qquad (0<s<a)$$
$$\kappa'(s)>0 \qquad (a<s<L)$$

其中假设 $s=0$ 对应于点 A，$s=a$ 对应于点 B。

设连结A与B的直线为x轴，由性质(b)知，曲线C的形状如图1.10 所示。令

$$\boldsymbol{x}(s)=\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$$

则

$$y(s)>0 \ (0<s<a); \ y(s)<0 \ (a<s<L)$$

$$\therefore \quad \kappa'(s)y(s)<0 \qquad (0<s<L) \qquad (3.16)$$

其次，运用弗雷内(3.12)公式得

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \boldsymbol{t}' = \kappa \boldsymbol{n} = \kappa \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \kappa y' = -x''$$

由此，可作下列运算。

$$\int_0^L \kappa' y ds = [\kappa y]_0^L - \int_0^L \kappa y' ds$$

$$= \int_0^L x'' ds = x'(L) - x'(0) = 0$$

推导过程中运用了 $\kappa(L) = \kappa(0)$，$y(L) = y(0)$，$x'(L) = x'(0)$。从上式与(3.16)得

$$\kappa' y = 0$$

这与(3.16)矛盾。故除 A 与 B 外，在曲线 C 上至少存在一个顶点 P。

如果假设除 A, B, P 之外不存在顶点，则设 P 的坐标为 $(x(b), y(b))$，考虑下列两种情况：（i）$0<b<a$，（ii）$a<b<L$。

（i）当 $0<b<a$ 时，$\kappa'(s)<0$，$(0<s<b,\ b<s<a)$；$\kappa'(s)>0$，$(a<s<L)$。

（ii）当 $a<b<L$ 时，$\kappa'(s)<0$，$(0<s<a)$；$\kappa'(s)>0$，$(a<s<b,\ b<s<L)$。

对于这两种情况，上面的议论同样成立，引起不合理。故卵形线 C 上至少有四个顶点。（证毕）

§4 自然方程

设给定三维欧氏空间 E^3 的**合同变换** $T: E^3 \to E^3$。又设点 P 的位置向量为 $\boldsymbol{x}$，点 $\bar{P} = T(P)$ 的位置向量为 $\bar{\boldsymbol{x}}$，则

$$\bar{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d} \qquad (4.1)$$

式中 $\boldsymbol{d}$ 为常向量，A 为正交矩阵。总之，${}^tAA = I$（I 为单位矩阵，${}^tA$ 为 A 的转置矩阵）。当在 T 下向量 $\boldsymbol{v}$ 变为向量 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 时，下式成立。

$$\bar{\boldsymbol{v}} = A\boldsymbol{v} \qquad (4.2)$$

当矩阵 A 的行列式以 $|A|$ 表示时，因 A 为正交矩阵，故

$$|A| = \pm 1$$

当 $|A| = +1$ 时，T 叫做**运动**。当 $|A| = -1$ 时，T 为关于 xy 平面的反射变换（$\bar{x} = x$，$\bar{y} = y$，$\bar{z} = -z$）与一运动的复合。

设 C 为 E^3 内的正则曲线 $\boldsymbol{x}: I \to E^3$。又设 $T: E^3 \to E^3$ 为合同变换，假设它是由(4.1)给定的。复合映射 $\bar{\boldsymbol{x}} = T \circ \boldsymbol{x}: I \to E^3$ 表示一条正则曲线 $\bar{C}$。这时，我们说在合同变换 T 之下，C 变为 $\bar{C}$。如于 § 2 所述，合同变换 T 保持曲线的弧长 s 不变。又设 C^∞ 向量函数 $\boldsymbol{v}(s)$ 在 T 下变为 C^∞ 向量函数 $\bar{\boldsymbol{v}}(s)$，则

$$\bar{\boldsymbol{v}}(s) = A\boldsymbol{v}, \qquad \bar{\boldsymbol{v}}' = A\boldsymbol{v}' \tag{4.3}$$

故设 C 与 $\bar{C}$ 的弗雷内标架分别为 $(\boldsymbol{x}(s); \boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{b}(s), \boldsymbol{n}(s))$ 与 $(\bar{\boldsymbol{x}}(s); \bar{\boldsymbol{t}}(s), \bar{\boldsymbol{b}}(s), \bar{\boldsymbol{n}}(s))$，则由（4.3）得下列关系式。

$$\bar{\boldsymbol{x}}(s) = A\boldsymbol{x}(s) + \boldsymbol{d}, \quad \bar{\boldsymbol{t}}(s) = A\boldsymbol{t}(s), \quad \bar{\kappa}\bar{\boldsymbol{n}}(s) = \kappa A\boldsymbol{n}(s)$$

又因 $\bar{\boldsymbol{x}}''(s) = A\boldsymbol{x}''(s)$，故 $\bar{\kappa}(s) = \|\bar{\boldsymbol{x}}''(s)\| = \|\boldsymbol{x}''(s)\| = \kappa(s)$。

于是
$$\bar{\kappa}(s) = \kappa(s), \qquad \bar{\boldsymbol{n}}(s) = A\boldsymbol{n}(s)$$

式中 $\bar{\kappa}$ 与 κ 分别为 $\bar{C}$ 与 C 的曲率。又因 $\bar{\boldsymbol{b}}$ 与 $\bar{\boldsymbol{t}}$ 及 $\bar{\boldsymbol{n}}$ 垂直，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{t}$ $\boldsymbol{n}$ 及垂直，故[1)]

$$\bar{\boldsymbol{b}} = \varepsilon A\boldsymbol{b} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

然因
$$1 = |\bar{\boldsymbol{t}}, \bar{\boldsymbol{n}}, \bar{\boldsymbol{b}}| = |A\boldsymbol{t} \ \ A\boldsymbol{n} \ \ \varepsilon A\boldsymbol{b}|$$
$$= \varepsilon |A| |\boldsymbol{t} \ \boldsymbol{n} \ \boldsymbol{b}| = \varepsilon |A| \cdot 1 = \varepsilon |A|,$$

因 $|A| = \pm 1$，故 $\varepsilon = |A|$。于是

$$\bar{\boldsymbol{b}} = |A| A\boldsymbol{b}$$

其次运用弗雷内公式得

$$-\bar{\tau}\bar{\boldsymbol{n}} = \frac{d\bar{\boldsymbol{b}}}{ds} = |A| A \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$$
$$= |A| A(-\tau\boldsymbol{n}) = -|A| \tau\bar{\boldsymbol{n}}$$
$$\therefore \quad \bar{\tau} = |A| \tau$$

---

1) 在合同变换下夹角不变，因此 $A\boldsymbol{b}$ 与 $A\boldsymbol{t}$，$A\boldsymbol{n}$ 垂直。 （译者注）

整理上述各事实，得下列定理。

定理 1.5 在合同变换(4.1)下，相对应的二正则曲线 C 与 $\overline{C}$ 的弗雷内标架、曲率与挠率之间成立下列关系。

$$\begin{aligned}&\overline{\boldsymbol{t}}=A\boldsymbol{t},\quad \overline{\boldsymbol{n}}=A\boldsymbol{n},\quad \overline{\boldsymbol{b}}=|A|A\boldsymbol{b}\\&\overline{\kappa}=\kappa,\quad \overline{\tau}=|A|\tau,\quad (|A|=\pm 1)\end{aligned}\qquad(4.4)$$

故由定理 1.5 可见，成立下列

定理 1.6 在运动之下，曲线的曲率与挠率不变。

设正则曲线 C 由 $\boldsymbol{x}: I\to E^3$ 给定，弧长 s 为其参数。正则曲线 $\overline{C}$ 由 $\overline{\boldsymbol{x}}: I\to E^3$ 给定，弧长 s 为其参数。这时，对于C上的点 $\boldsymbol{x}(s)$，有 $\overline{C}$ 上的点 $\overline{\boldsymbol{x}}(s)$ $(s\in I)$ 与之一一对应。在这种情况下，人们说曲线 C 与曲线 $\overline{C}$ 之间有保持弧长的对应。下列基本定理成立。

定理 1.7 当正则曲线 C 与 $\overline{C}$ 之间有保持弧长的对应，于对应点两曲线的曲率与挠率相等时，则这种对应可由一运动使 C 与 $\overline{C}$ 迭合。

〈**证明**〉 设 C 与 $\overline{C}$ 的弗雷内标架分别为 $(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{t},\ \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{b})$ 与 $(\overline{\boldsymbol{x}};\ \overline{\boldsymbol{t}},\ \overline{\boldsymbol{n}},\ \overline{\boldsymbol{b}})$，曲率分别为 $\kappa(s)$ 与 $\overline{\kappa}(s)$，挠率分别为 $\tau(s)$ 与 $\overline{\tau}(s)$。由定理的假设知

$$\kappa(s)=\overline{\kappa}(s),\quad \tau(s)=\overline{\tau}(s),\quad (s\in I)\qquad(4.5)$$

因为在点 $\boldsymbol{x}(0)$ 处 C 的弗雷内标架 $(\boldsymbol{x}(0);\ \boldsymbol{t}(0),\ \boldsymbol{n}(0),\ \boldsymbol{b}(0))$ 与点 $\overline{\boldsymbol{x}}(0)$ 处 $\overline{C}$ 的弗雷内标架 $(\overline{\boldsymbol{x}}(0);\ \overline{\boldsymbol{t}}(0),\ \overline{\boldsymbol{n}}(0),\ \overline{\boldsymbol{b}}(0))$ 相迭合的运动只有一个，设为 T。即

$$\begin{aligned}&T\boldsymbol{x}(0)=\overline{\boldsymbol{x}}(0),\quad T\boldsymbol{t}(0)=\overline{\boldsymbol{t}}(0),\\&T\boldsymbol{n}(0)=\overline{\boldsymbol{n}}(0),\quad T\boldsymbol{b}(0)=\overline{\boldsymbol{b}}(0)\end{aligned}\qquad(4.6)$$

其次，以 T 移动 C 而得的曲线 $\widetilde{C}$ 用 $\widetilde{\boldsymbol{x}}: I\to E^3$ 表示，设其弗雷内标架为 $(\widetilde{\boldsymbol{x}};\ \widetilde{\boldsymbol{t}},\ \widetilde{\boldsymbol{n}},\ \widetilde{\boldsymbol{b}})$。运用(4.6)得

$$\begin{aligned}&\widetilde{\boldsymbol{x}}(0)=\overline{\boldsymbol{x}}(0),\quad \widetilde{\boldsymbol{t}}(0)=\overline{\boldsymbol{t}}(0),\\&\widetilde{\boldsymbol{n}}(0)=\overline{\boldsymbol{n}}(0),\quad \widetilde{\boldsymbol{b}}(0)=\overline{\boldsymbol{b}}(0)\end{aligned}\qquad(4.7)$$

又设 $\widetilde{C}$ 的曲率与挠率分别为 $\widetilde{\kappa}$ 与 $\widetilde{\tau}$，则由定理 1.6 知 $\kappa(s)=\widetilde{\kappa}(s)$，

$\tau(s)=\tilde{\tau}(s)$，故从(4.5)得

$$\tilde{\kappa}(s)=\bar{\kappa}(s),\quad \tilde{\tau}(s)=\bar{\tau}(s),\quad (s\in I) \tag{4.8}$$

从 $\tilde{C}$ 与 $\bar{C}$ 的弗雷内公式可见，区间 I 上的函数组（$\bar{\boldsymbol{x}}(s)$；$\bar{\boldsymbol{t}}(s)$，$\bar{\boldsymbol{n}}(s)$，$\bar{\boldsymbol{b}}(s)$）与（$\tilde{\boldsymbol{x}}(s)$；$\tilde{\boldsymbol{t}}(s)$，$\tilde{\boldsymbol{n}}(s)$，$\tilde{\boldsymbol{b}}(s)$）为一个微分方程组

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}' &= \boldsymbol{t} \\
\boldsymbol{t}' &= \qquad \bar{\kappa}\boldsymbol{n} \\
\boldsymbol{n}' &= -\bar{\kappa}\boldsymbol{t} \qquad + \bar{\tau}\boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{b}' &= \qquad -\bar{\tau}\boldsymbol{n}
\end{aligned}$$

的解（利用(4.8)），而且满足相同的初始条件（利用(4.7)）．故由常微分方程论的存在定理（见后述定理 1.9）可得

$$\begin{aligned}
&\tilde{\boldsymbol{x}}(s)=\bar{\boldsymbol{x}}(s), \quad \tilde{\boldsymbol{t}}(s)=\bar{\boldsymbol{t}}(s), \\
&\tilde{\boldsymbol{n}}(s)=\bar{\boldsymbol{n}}(s), \quad \tilde{\boldsymbol{b}}(s)=\bar{\boldsymbol{b}}(s) \quad (s\in I)
\end{aligned}$$

即 $\tilde{C}$ 与 $\bar{C}$ 迭合。故由运动 T 移动 C 便与 $\bar{C}$ 迭合。　　（证毕）

下列定理成立。

定理 1.8　设给定在区间 I 上定义的 C^∞ 函数 $\kappa(s)$（>0）与 $\tau(s)$。这时，以 s 为弧长，κ 与 τ 分别为曲率与挠率的正则曲线必存在。

〈**证明**〉　将所求曲线 C 的弗雷内标架（$\boldsymbol{x}(s)$；$\boldsymbol{t}(s)$，$\boldsymbol{n}(s)$，$\boldsymbol{b}(s)$）满足的弗雷内公式

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}' &= \boldsymbol{t}, \quad \boldsymbol{n}' = -\kappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{t}' &= \kappa\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{b}' = -\tau\boldsymbol{n}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

看做以 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}$ 为未知函数的线性常微分方程组。今取 $\boldsymbol{x}_0\in E^3$ 以及互相垂直的单位向量 $\boldsymbol{t}_0$，$\boldsymbol{n}_0$，$\boldsymbol{b}_0$（$=\boldsymbol{t}_0\times\boldsymbol{n}_0$）。由后述定理 1.9 知，满足初始条件

$$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\quad \boldsymbol{t}(0)=\boldsymbol{t}_0,\quad \boldsymbol{n}(0)=\boldsymbol{n}_0,\quad \boldsymbol{b}(0)=\boldsymbol{b}_0$$

(4.9)的解

$$(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{t},\ \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{b}) \tag{4.10}$$

存在。利用此组解，作出以下 6 个函数。

$$f_1=\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}-1,\quad f_2=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}-1,\quad f_3=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-1$$
$$g_1=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b},\quad g_2=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{t},\quad g_3=\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n} \tag{4.11}$$

再利用（4.9）可得

$$\frac{df_1}{ds}=2\kappa g_3,\quad \frac{df_2}{ds}=-2\kappa g_3+2\tau g_1,\quad \frac{df_3}{ds}=-2\tau g_1$$

$$\frac{dg_1}{ds}=-\kappa g_2+\tau(f_3-f_2),\quad \frac{dg_2}{ds}=\kappa g_1-\tau g_3, \tag{4.12}$$

$$\frac{dg_3}{ds}=\tau g_2+\kappa(f_2-f_1)$$

这是关于 f_1，f_2，f_3，g_1，g_2，g_3 的线性常微分方程组。(4.12)有解 $f_1=f_2=f_3=g_1=g_2=g_3=0$，并且满足初始条件

$$f_1(0)=f_2(0)=f_3(0)$$
$$=g_1(0)=g_2(0)=g_3(0)=0 \tag{4.13}$$

但(4.11)也是(4.12)的解，并且满足初始条件(4.13)。故由定理 1.9 知，这两种解一致。因此用解（4.10）根据（4.11）定义的 f_1，f_2，f_3，g_1，g_2，g_3 全恒等于0。换言之，(4.10)的 $\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}$ 是互相垂直的单位向量。$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}$（因 $\boldsymbol{b}_0=\boldsymbol{t}_0\times\boldsymbol{n}_0$，$\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}$ 连续，故 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}$）。用解(4.10)，设由方程 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 表达的曲线为 C，则它是正则的，C 的曲率与挠率分别等于给定的 κ 与 τ。　　（证毕）

由定理 1.6，1.7，1.8 可见，正则曲线的微分几何学性质由曲率与挠率（弧长 s 的函数）完全决定（除运动外）。即可以认为方程

$$\kappa=\kappa(s),\quad \tau=\tau(s),\quad (s\in I) \tag{4.14}$$

里凝集了正则曲线 $\boldsymbol{x}:I\to E_3$ 的全部微分几何学性质。(4.14)叫做曲线的**自然方程**。

以下叙述在论证定理 1.7 与 1.8 时使用的常微分方程的有关定理。

定理 1.9 设给定定义在区间 I 上的 m^2 个 C^∞ 函数 $P_{\lambda\mu}(t)$ $(t\in I)$ $(\lambda,\mu=1,\cdots,m)$．m 个未知函数$y_1,\cdots,y_m$的线性常微分方程组

$$\frac{dy_\lambda}{dt}=\sum_{\mu=1}^{m}P_{\lambda\mu}(t)y_\mu,\quad(\lambda=1,\ \cdots,\ m)$$

具有取任意初始值 $y_1(a)$, …, $y_m(a)$ ($a\in I$) 的 C^∞ 级解 $y_1(t)$, …, $y_m(t)$ (在 a 的充分小邻域里)，而且这样的解只有一个。

例 4.1 由〔问题 3.1〕可见，正螺线具有一定的曲率 $\kappa(>0)$ 与一定的挠率 τ。故具有一定曲率与挠率的曲线与一正螺线合同。

习 题 一

1. 试求下列正则曲线的弧长。

$$x=3\cosh 2t,\ y=3\sinh 2t,\ z=6t,\ (0\leqslant t\leqslant a)$$

2. 关于正则曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$，试证下式。但设 s 为弧长。

(1) $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{x}''=\kappa\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{x}'''=-\kappa^2\boldsymbol{t}+\kappa'\boldsymbol{n}+\tau\kappa\boldsymbol{b}$

(2) $$\boldsymbol{x}(s)=\boldsymbol{x}(0)+\left(s-\frac{1}{6}\kappa_0^2s^3\right)\boldsymbol{t}_0+\left(\frac{1}{2}\kappa_0s^2+\frac{1}{6}\kappa_0's^3\right)\boldsymbol{n}_0$$
$$+\frac{1}{6}\kappa_0\tau_0s^3\boldsymbol{b}_0+o(s^3)$$

式中 $\boldsymbol{t}_0$, $\boldsymbol{n}_0$, $\boldsymbol{b}_0$, κ_0, τ_0, κ_0' 分别表示对应文字所示函数在 $s=0$处的值。又 $o(s^3)$表示 s 的 4 次以上的项。

3. 如果正则曲线满足下列条件(1)或(2)，试证它是直线或其一部分。

(1) 切线通过定点。

(2) 于各点的切线互相平行。

4. 如果正则曲线在半径为 a 的球面上，试证下式成立。但设 $\kappa\neq0$, $\tau\neq0$。

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2+\left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)^2=a^2$$

5. 如果正则曲线在一球面上，试证下式成立。

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)-\frac{\tau}{\kappa}=0$$

但设 $\kappa \neq 0$，$\tau \neq 0$。

6. 如果设正则曲线上相近二点 P，Q 间的弧长为 s，试证弦 PQ 的长与 s 之差和 s^3 是同阶无穷小。

7. 给定正则曲线 $C: \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 上的 C^∞ 函数 $h(s)$，考虑曲线

$$\overline{C}: \overline{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}(s)+h(s)\boldsymbol{t}(s), \quad (\boldsymbol{t}(s)=\boldsymbol{x}'(s))$$

试证以下事实，但令 $\overline{\boldsymbol{x}}(s)=\boldsymbol{x}(s)+h(s)\boldsymbol{t}(s)$。

(1) $d\overline{\boldsymbol{x}}(s)/ds$ 与 $\boldsymbol{t}(s)$ 垂直的充要条件是

$$h=-s+c \quad (c \text{ 为常数})$$

(2) 设(1)的曲线 C 的曲率与挠率分别为 κ 与 τ，则曲线 $\overline{C}$ 的曲率 $\overline{\kappa}$ 为

$$\overline{\kappa}^2=\frac{\kappa^2+\tau^2}{(c-s)^2\kappa^2}$$

8. 对于平面上的正则曲线 $C: \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ 上的点 $\boldsymbol{x}(s)$，点

$$\boldsymbol{x}(s)+\rho(s)\boldsymbol{n}(s)$$

($\rho(s)$ 为 C 的曲率半径) 叫做在此点的**曲率中心**。在 C 上二点 P，Q 处，对应的曲率半径之差等于 P，Q 间各点的曲率中心所成曲线之弧长。试证明之。

9. 设 $\mathbf{g}(t)$ 为 C^∞ 向量函数，$\|\mathbf{g}(t)\|=1$。对于由方程

$$\boldsymbol{x}=a\int \mathbf{g}(t)\times\frac{d\mathbf{g}(t)}{dt}dt \quad (a \neq 0 \text{ 为常数})$$

表达的正则曲线 C，$\kappa \neq 0$ 与 $\tau=a^{-1}$ 成立。试证明之。

10. 在柱面：$x=f(t)$，$y=g(t)$，$z=u$ (t 与 u 为参数) 上，以定角 α 割其母线的曲线的方程为

$$x=f(t), \qquad y=g(t),$$

$$z=\pm\cot\alpha\int\sqrt{\left(\frac{df}{dt}\right)^2+\left(\frac{dg}{dt}\right)^2}\,dt$$

试证明之。

11. 试求二曲面 $f(x,y,z)=0$ 与 $g(x,y,z)=0$ 的交线的切向量。

12. 试决定 C^∞ 函数 $\phi(t)$ 使得曲线

$$x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\quad z = \phi(t),\quad (a \text{ 为常数})$$

为平面曲线。

13. 定义正则曲线 $\boldsymbol{x}:\boldsymbol{R}\to E^3$ 为

$$\begin{cases} x = t,\ y = 0,\ z = e^{-1/t^2} & (t<0) \\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0 & (t=0) \\ x = t,\ y = e^{-1/t^2},\ z = 0 & (t>0) \end{cases}$$

试证下列事实。

(1) $\kappa(0) = 0$

(2) $\tau = 0,\ (t \neq 0)$

(3) 不能定义单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 沿整个曲线连续。

第二章　曲　面 I

§5　局 部 曲 面

在平面上取直角坐标系．当平面上的开集U与开圆盘$\{(u,v)\,|u^2+v^2<1\}$同胚时，则简称U为**开圆盘**。当给定从开圆盘到三维欧氏空间E^3中的映射$\theta:U\to E^3$时，因点$\theta(u,v)((u,v)\in U)$属于E^3，故令其位置向量为

$$\boldsymbol{x}(u,v)=\begin{pmatrix} x(u,v)\\ y(u,v)\\ z(u,v)\end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

当在U上定义的函数$x(u,v),y(u,v),z(u,v)$全是C^∞函数时，则称映射$\theta:U\to E^3$为C^∞映射。象$S=\theta(U)$为E^3的子集。当C^∞映射$\theta:U\to E^3$满足下列条件(i)，(ii)时，则组(U,θ,S)称为**局部曲面**。

(i)　$\theta:U\to S$为1对1，$\theta^{-1}:S\to U$连续(在S上给定由E^3的拓扑导入的相对拓扑)．

(ii)　θ的雅可比矩阵的秩数为2．即

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}=2 \tag{5.2}$$

对于局部曲面(U,θ,S)，映射θ用方程

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v) \quad ((u,v)\in U) \tag{5.3}$$

或方程

$$x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v) \quad ((u,v)\in U)$$

表示，称之为此局部曲面（U，θ，S）或简称之为局部曲面 S 的**参数表示**，(u,v)称为点 $\theta(u,v)(\in S)$ 在曲面 S 上的**坐标**。此时也说在局部曲面 S 内取了**坐标系**(u,v)。从常识来讲，当称点集 $S(\subset E^3)$ 为曲面

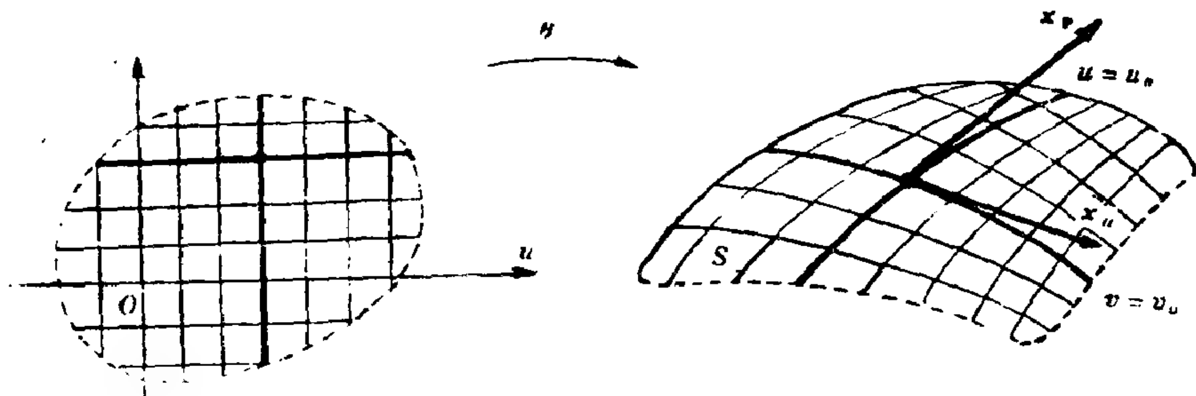


图 2.1

而不会引起混乱时，有时称 S 为局部曲面或简称之为曲面。如果满足 $v=v_0$（常数）的条件，同时只是 u 变化，则在 E^3 内得曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v_0)$，这是曲面 S 上的曲线。这样曲线叫做 **u 曲线**，以方程 $v=v_0$表示。同理，曲面上的曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u_0,v)$，($u_0$ 为常数）叫做 **v 曲线**，以方程 $u=u_0$ 表示。总称 u 曲线与 v 曲线为**坐标曲线**。总之，在曲面 S 上有两组坐标曲线族，作成如图 2.1 之网。又因映射 $\theta:U\rightarrow S$ 是 1 对 1 的，故 u 曲线 $v=v_0$ 与 v 曲线 $u=u_0$ 只交于一点 $\boldsymbol{x}(u_0,v_0)$。

通过曲面上的点 $\boldsymbol{x}(u,v)$，u 曲线的切向量为

$$\boldsymbol{x}_u=\frac{\partial \boldsymbol{x}(u,v)}{\partial u}, \tag{5.4}$$

v 曲线的切向量为

$$\boldsymbol{x}_v=\frac{\partial \boldsymbol{x}(u,v)}{\partial v} \tag{5.5}$$

由前矩阵的秩数性质可知，前述条件(ii)与

$$\text{(ii)}' \qquad \boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad (5.6)$$

等价。

而此条件(ii)′ 又与下面条件(ii)″ 等价。

(ii)″ $\boldsymbol{x}_u$ 与 $\boldsymbol{x}_v$ 在曲面 S 上各点线性无关。

例 5.1 参数表示

$$x=\cos\theta\sin\varphi,\ y=\sin\theta\sin\varphi,\ z=\cos\varphi,\ (0<\theta<2\pi,\ 0<\varphi<\pi)$$

表示球面：$x^2+y^2+z^2=1$ 的一部分，定义一个局部曲面 (U,f,S). U 与 S 如下图 2.2 所示。S 是从右侧的球面去掉对径点 $P(0,0,1)$ 与 $Q(0,0,-1)$ 以及连结 P 与 Q 的半个大圆。确实，在这种情况下，在 U 中下式成立。

$$\|\boldsymbol{x}_\theta \times \boldsymbol{x}_\varphi\| = |\sin\varphi| \neq 0, \quad \therefore \boldsymbol{x}_\theta \times \boldsymbol{x}_\varphi \neq 0$$

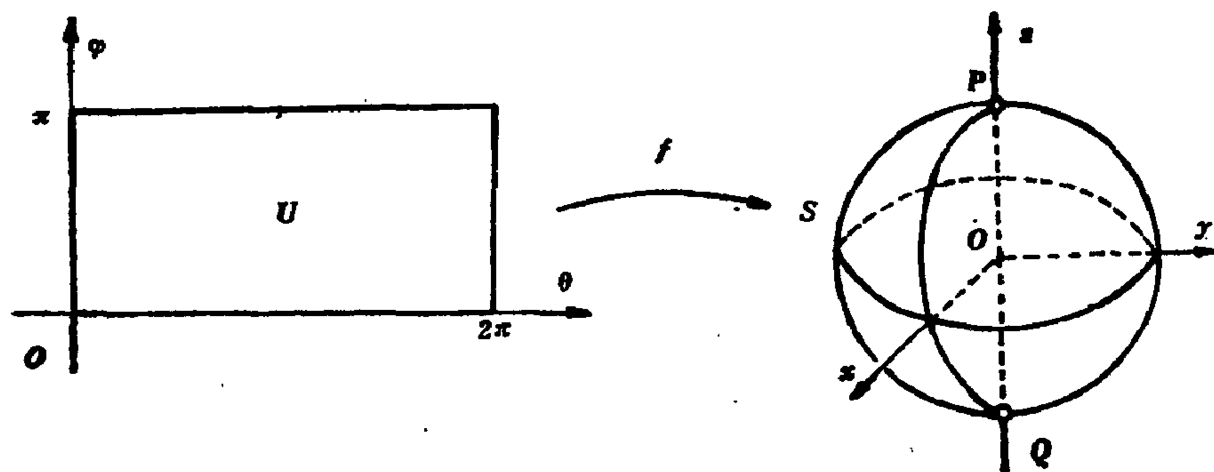


图 2.2

设 U 与 V 为平面上的开圆盘，并设给定了连续映射 $f:V\to U$。设点 $f((\theta,\varphi))$ $((\theta,\varphi)\in V)$ 在平面 U 上的坐标为 $(u(\theta,\varphi),v(\theta,\varphi))$ 时，如果 V 上的函数 $u(\theta,\varphi),v(\theta,\varphi)$ 为 C^∞ 函数，就说 $f:V\to U$ 为 C^∞

映射. 当 $f: V \to U$ 为同胚映射，而且 f 与 f^{-1} 为 C^∞ 映射时，f 叫做 C^∞ **同胚**。

当 $f: V \to U$ 为 C^∞ 同胚，在 V 内的任意 (θ, φ) 处，f 的雅可比行列式满足

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \theta} & \dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial v}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (5.7)$$

时，则称 $f: V \to U$ 为**容许坐标变换**或简称之为**坐标变换**。

设 (U, ϕ, S) 为局部曲面，$f: V \to U$ 为容许坐标变换。这时，如果用方程 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*(\theta, \varphi)$ 表示复合映射 $\phi^* = \phi \circ f: V \to S$，$\boldsymbol{x}(u, v)$ 表示 $\phi: U \to S$，则

$$\boldsymbol{x}_\theta^* = \frac{\partial u}{\partial \theta} \boldsymbol{x}_u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \boldsymbol{x}_v, \quad \boldsymbol{x}_\varphi^* = \frac{\partial u}{\partial \varphi} \boldsymbol{x}_u + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \boldsymbol{x}_v \qquad (5.8)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x}_\theta^* \times \boldsymbol{x}_\varphi^* = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \theta} & \dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial v}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v \qquad (5.9)$$

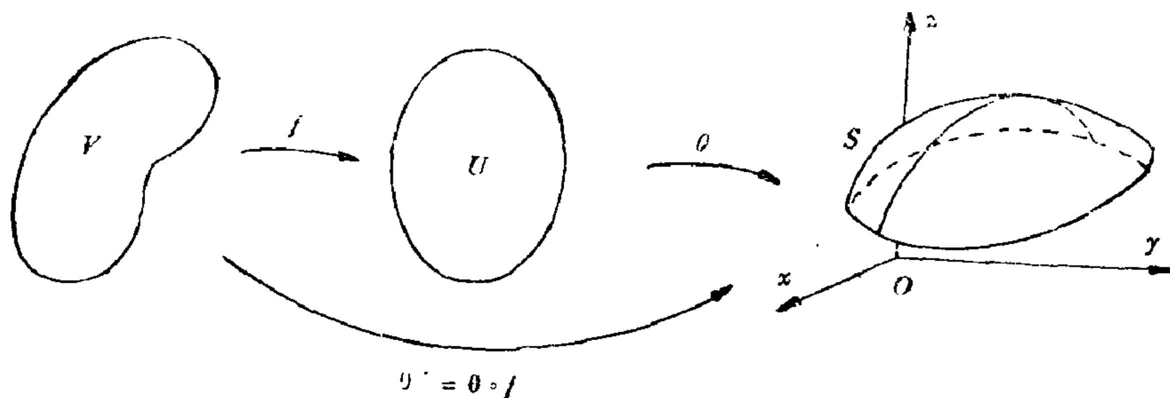


图 2.3

然因 $\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v \neq 0$，故由(5.7)得 $\boldsymbol{x}_\theta^* \times \boldsymbol{x}_\varphi^* \neq 0$。从而 (V, ϕ^*, S) 为一局部曲面。从常识来看，容许坐标变换更换局部曲面 S 的参数，相当于解析几何学的坐标变换。

【问题 5.1】 在平面上某开圆盘D上定义的C^∞ 函数 $f(x,y)$ 的图形

$$S=\{(x,y,z)\,|z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

为局部曲面。试证明之。

§6 简 单 曲 面

对于欧氏空间E^3内的子集S，如果存在满足下列条件(i)，(ii)的局部曲面族$\mathscr{B}=\{(U,\theta,O)\}$时，称$S$为**简单曲面**.

(i) $$S=\bigcup_{(U,\theta,O)\in\mathscr{B}} O$$

即对于S上任意的点P，存在属于$\mathscr{B}$的局部曲面(U,θ,O)使得$P\in O$。

(ii) 对于$\mathscr{B}$的任意元(U,θ,O)，O为E^3的某个开集G与S的公共部分。即$O=S\cap G$。

这时，局部曲面族$\mathscr{B}$叫做简单曲面S的 atlas（意思是地图册，译做**图册**），$\mathscr{B}$的元、局部曲面(U,θ,O)或$O(\subset S)$叫做简单曲面S的**坐标邻域**。根据上列条件(ii)得坐标邻域O为S（从E^3的自然拓扑在S上引入相对拓扑）的开集。总之，条件(i)的含意是开集族$\{O|(U,\theta,O)\in\mathscr{B}\}$为简单曲面$S$的开复盖。如果局部曲面$(U,\theta,O)\in\mathscr{B}$能用方程

$$x=x(u,v)\quad((u,v)\in U)$$

表示时，就说此方程为简单曲面S在坐标邻域O的**局部表示**。

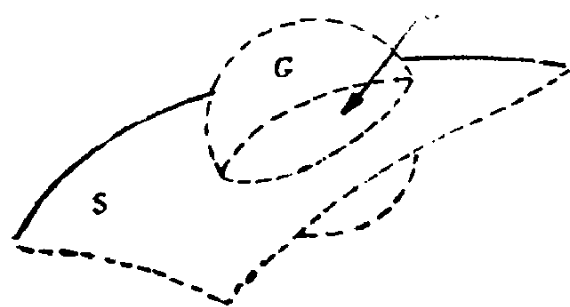


图 2.4

在此第二章与下面第三章只讨论简单曲面，故常常将简单曲面略称为**曲面**。

对于局部曲面$(W,\varphi,\bar{O})$，$\bar{O}$为曲面S的开集，而且给定义S的图册$\mathscr{B}$添加$(W,\varphi,\bar{O})$，依然得到S的图册时，有时称$(W,\varphi,\bar{O})$为

曲面 S 的**坐标邻域**。

例 6.1 试证单位球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$ 为简单曲面。

〈解答〉 在球面 S 中考虑下列六个子集：

$O_x^+=\{(x,y,z)\in S|\ x>0\}$, $O_x^-=\{(x,y,z)\in S|\ x<0\}$

$O_y^+=\{(x,y,z)\in S|\ y>0\}$, $O_y^-=\{(x,y,z)\in S|\ y<0\}$

$O_z^+=\{(x,y,z)\in S|\ z>0\}$, $O_z^-=\{(x,y,z)\in S|\ z<0\}$

其次设 $U=\{(u,v)\,|\,u^2+v^2<1\}$。映射 $\theta_z^+: U\to O_z^+$ 与 $\theta_z^-: U\to O_z^-$ 分别由

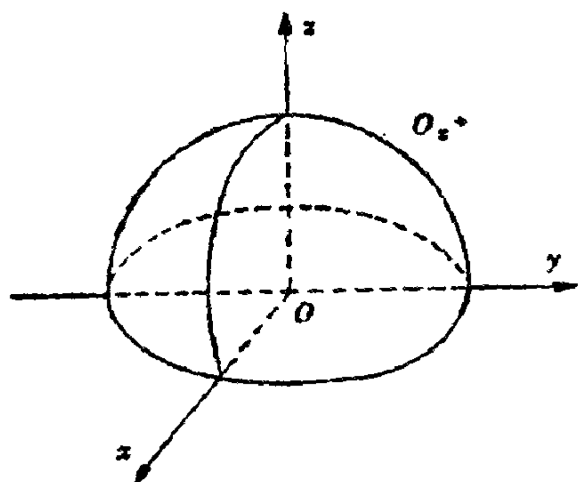


图 2.5

$$\theta_z^+(u,v)=(u,v,\sqrt{1-u^2-v^2})\in O_z^+,\quad ((u,v)\in U);$$

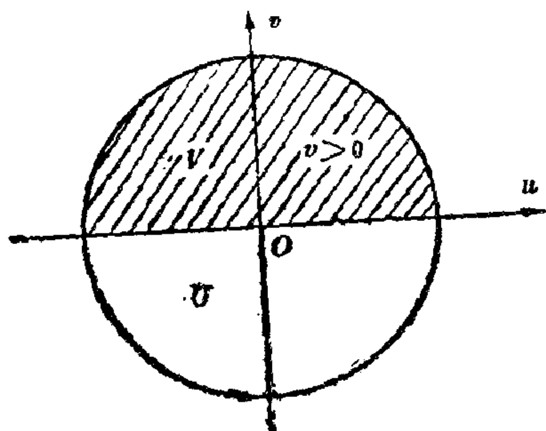
$$\theta_z^-(u,v)=(u,v,-\sqrt{1-u^2-v^2})\in O_z^-,\quad ((u,v)\in U)$$

定义。以下同理定义映射

$\theta_x^+: U\to O_x^+$, $\theta_x^-: U\to O_x^-$,

$\theta_y^+: U\to O_y^+$, $\theta_y^-: U\to O_y^-$,

设六个局部曲面 (U,θ_x^+,O_x^+), (U,θ_x^-,O_x^-), …, (U,θ_z^-,O_z^-) 所作的集为 $\mathscr{B}$。显然，这个 $\mathscr{B}$ 满足上述条件(i)，(ii)。故球



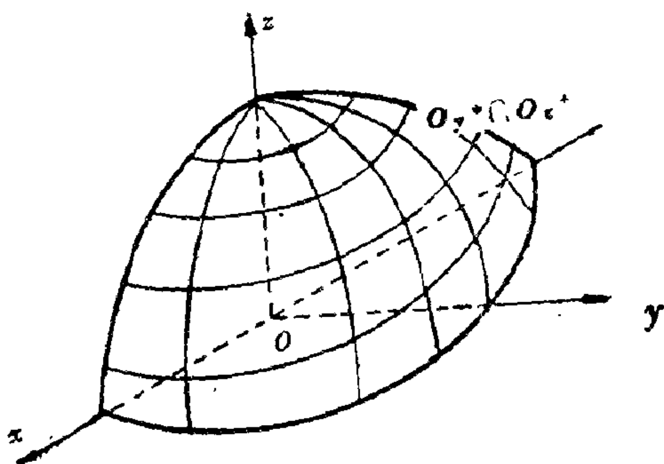


图 2.6

面S为简单曲面。（证毕）

再说 $O_y^+\cap O_z^+\neq\varnothing$. 对于$U$上的点$(u,v)$,
$\theta_y^+(u,v)=(u,\sqrt{1-u^2-v^2},v)$, $\theta_z^+(u,v)=(u,v,\sqrt{1-u^2-v^2})$
故 $(\theta_y^+)^{-1}(O_y^+\cap O_z^+)$ 与 $(\theta_z^+)^{-1}(O_y^+\cap O_z^+)$ 一致，为图 2.6 里右图所示开圆盘（开半圆盘）V. 因此，令

$$\theta=(\theta_z^+)^{-1}\circ\theta_y^+:V\to V,$$

设 $\theta(u,v)=(u',v')\quad((u,v)\in V)$,则

$$u'=u,\quad v'=\sqrt{1-u^2-v^2}$$

是表达θ的方程.显然,$\theta=(\theta_z^+)^{-1}\circ\theta_y^+$ 是 C^∞ 同胚.因为 $v>0$,所以

$$\frac{\partial(u',v')}{\partial(u,v)}=\frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\neq 0,$$

故 $\theta=(\theta_z^+)^{-1}\circ\theta_y^+:V\to V$ 为容许坐标变换。在球面S的其他坐标邻域的公共部分，同样的论断成立。（参照后述定理 2.1）（证毕）

例 6.2 如图2.7所示,自相交的面F不是本节定义的曲面(简单曲面).原因是，在图里考虑点 P,E^3含P的任何开集G与面F的公共部分 $F\cap G$ 和开圆盘并不同胚.

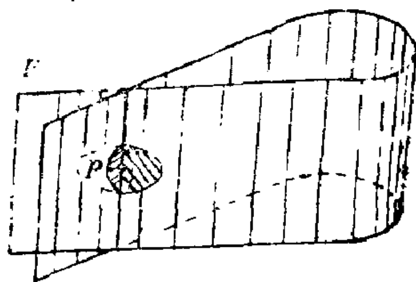


图 2.7

例 6.3 图 2.8 表示映射θ将左侧的条形面段U映为右侧的面F.今当点a沿直线l向左侧无限远离时，设其对应点$A=\theta(a)$无限接近点$P=\theta(p)$. 这时,不论怎样选取E^3的含P开集G,但$F\cap G$与开圆盘



图 2.8

并不同胚。因此，如上图所示，F不是本节定义的曲面(简单曲面)。

《注意》 在§28将重新定义曲面。上述例6.2与例6.3所示曲面是§28(p.201)之末定义的曲面.

取曲面S(见图2.9)的两个坐标邻域(U, θ, O)与$(V, \varphi, \overline{O})$，设$O\cap\overline{O}\neq\varnothing$.设$S$在$O$与$\overline{O}$里的局部表示分别为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v), \ ((u, v)\in U); \ \boldsymbol{x}=\overline{\boldsymbol{x}}(\overline{u}, \overline{v}), \ ((\overline{u}, \overline{v})\in V).$$

因θ与φ是1对1的，故

$$\varphi^{-1}\circ\theta: \theta^{-1}(O\cap\overline{O})\to\varphi^{-1}(O\cap\overline{O})$$

是1对1.于是当$\boldsymbol{x}(u, v)=\overline{\boldsymbol{x}}(\overline{u}, \overline{v})\in O\cap\overline{O}$时,则$\varphi^{-1}\circ\theta(u, v)=(\overline{u}, \overline{v})$.此对应以方程

$$\overline{u}=\overline{u}(u, v), \ \overline{v}=\overline{v}(u, v), \ ((u, v)\in\theta^{-1}(O\cap\overline{O})) \quad (6.1)$$

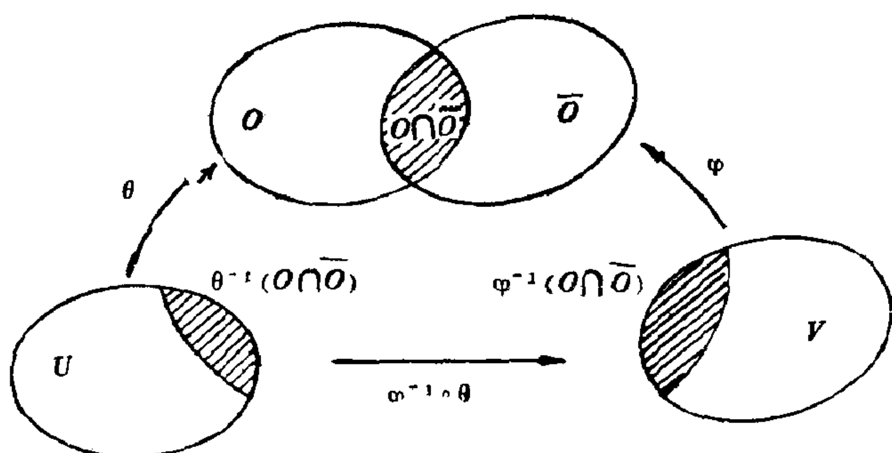


图 2.9

表示之，得等式

$$\boldsymbol{x}(u, v)=\overline{\boldsymbol{x}}(\overline{u}(u, v), \overline{v}(u, v)).$$

方程(6.1)叫做坐标邻域O与$\overline{O}$的公共部分$O\cap\overline{O}$的**坐标变换**.这时，下述事实成立.

坐标变换(6.1)是C^∞映射，1对1，且其雅可比行列式满足

$$\frac{\partial(\overline{u}, \overline{v})}{\partial(u, v)}\neq 0 \quad ((u, v)\in\theta^{-1}(O\cap\overline{O})) \quad (6.2)$$

〈证明〉 设局部曲面$(V, \varphi, \overline{O})$的局部表示如下:

$$x = x(\bar{u}, \bar{v}),\quad y = y(\bar{u}, \bar{v}),\quad z = z(\bar{u}, \bar{v}) \tag{6.3}$$

取$O \cap \bar{O}$的任意点，根据(5.2)知，可以设在包含此点的充分小邻域W里，

$$\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \neq 0 \tag{6.4}$$

成立。故由隐函数定理，可解(6.3)得

$$\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{y}),\qquad \bar{v} = g(\bar{x}, \bar{y}) \tag{6.5}$$

函数 f，g 是 C^∞ 函数。此外，关于局部曲面(U, θ, O)的局部表示

$$x = x(u,v),\quad y = y(u,v),\quad z = z(u,v) \tag{6.6}$$

也可假设在邻域W里

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0 \tag{6.7}$$

(应当指出，根据(5.6)，假设(6.4)与(6.7)的含义是法向量 N 的 z 分量不为0).然因于$O \cap \bar{O}$上，$x(u,v) = \bar{x}(\bar{u},\bar{v})$，$y(u,v) = \bar{y}(\bar{u},\bar{v})$，故将$\bar{x} = x(u,v)$，$\bar{y} = y(u,v)$代入(6.5)，则得

$$\bar{u} = \bar{u}(u,v),\qquad \bar{v} = \bar{v}(u,v) \tag{6.8}$$

这就是(6.1)。(6.8)的右边的$\bar{u}(u,v)$与$\bar{v}(u, v)$是 C^∞ 函数.此外，(6.8)的雅可比行列式由

$$\frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(\bar{x},\bar{y})}\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

决定。故由(6.4)与(6.7)可见

$$\frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)} \neq 0 \qquad \text{(证毕)}$$

由上述(6.2)立即可得如下定理。

定理 2.1 在曲面S的两个坐标邻域的公共部分的坐标变换是容许变换。

§7 切空间 切向量

曲面上的曲线 考虑曲面S与区间I.设已给定映射$C: I \to S$，

对任意的 $t_0\in I$，取含点 $C(t_0)$（$\in S$）的坐标邻域(U,θ,O)。这时，设 $C(t_0)=\theta(u_0,v_0)((u_0,v_0)\in U)$. 其次，取含 t_0 的子区间 $\tilde{I}(\subset I)$使得 $C(\tilde{I})\subset O$，则 $C:\tilde{I}\to O$可用方程

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u(t),\ v(t)),\ (t\in\tilde{I}) \qquad (7.1)$$

表示。式中 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$是$(U,\theta,O)$ 的局部表示，$u(t)$与 $v(t)$ 是在 $\tilde{I}$上定义的函数。如果在区间$\tilde{I}$上，$u(t)$与$v(t)$都是C^∞ 函数，那末 $C:I\to S$叫做曲面S上的 C^∞ **曲线**. 我们规定今后如不特殊声明，只说**曲线**时，其含义是 C^∞ 曲线。再说，(7.1)是 E^3 内的曲线$C:\tilde{I}\to S\subset E^3$ 的方程。把C看做 E^3 内的曲线时，(7.1)是它的局部表示。又方程

$$u=u(t),\quad v=v(t),\ (t\in\tilde{I}) \qquad (7.2)$$

叫做曲面S上的曲线C在坐标邻域$(U,\ \theta,\ O)$里的**局部表示**.

运用曲面S上的曲线 C（不必是正则的）的局部表示（7.1）与(7.2)，来求点 $P=C(t)(\subset O)$处C的切向量，得

$$\dot{C}=\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\frac{du}{dt}\boldsymbol{x}_u+\frac{dv}{dt}\boldsymbol{x}_v$$

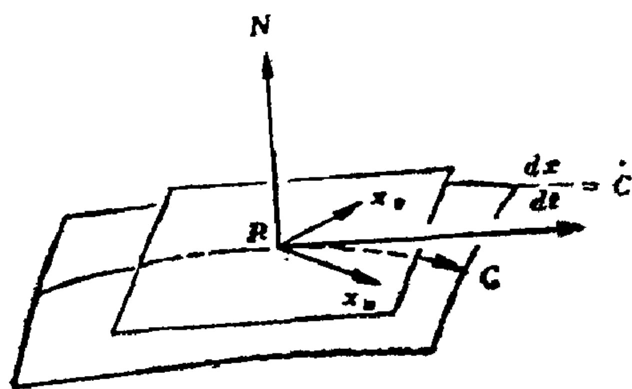


图 2.10

在曲面S上的点P处，通过点P，S上曲线的切向量叫做曲面S在点P的**切向量**。这是曲面的切向量的定义。其次，在点P对于任意数 a,b，考虑向量

$$\boldsymbol{A}=a(\boldsymbol{x}_u)_P+b(\boldsymbol{x}_v)_P.$$

这时考虑以

$$u=u_0+at,\qquad v=v_0+bt$$

为局部表示的S上曲线C（设P的坐标为$(u_0,\ v_0)$），则$\boldsymbol{A}$为此曲线C在点P的切向量，$\boldsymbol{A}$为曲面S的切向量。故曲面S上一点P处S的切向量全体的集为

$$T_P(S)=\{a(\boldsymbol{x}_u)_P+b(\boldsymbol{x}_v)_P \mid a,\ b\in \boldsymbol{R}\} \qquad (7.3)$$

这个 $T_P(S)$显然是二维向量空间（为证明这件事，运用 $\boldsymbol{x}_u$ 与 $\boldsymbol{x}_v$ 线性无关）。这个 $T_P(S)$叫做曲面 S 的**切空间**。整理之，得

在曲面 S 上点 P 处的切空间 $T_P(S)$是二维向量空间，$\boldsymbol{x}_u$ 与 $\boldsymbol{x}_v$ 作成它的基底。

如果 $\boldsymbol{A}\in T_P(M)$，P 包含于坐标邻域$(U,\ \theta,\ O)$内，那末在点 P 可表示成

$$\boldsymbol{A}=a(\boldsymbol{x}_u)_P+b(\boldsymbol{x}_v)_P \qquad (7.4)$$

因为 a 与 b 唯一地决定，所以数组$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$叫做切向量 $\boldsymbol{A}$ 在坐标邻域 O 的**分量**。

法向量　在曲面 S 上的点 P 与任意切向量都垂直的单位向量 $\boldsymbol{N}$ 叫做点 P 处的**单位法向量**。在坐标邻域$(U,\ \theta,\ O)$里，普通 $\boldsymbol{N}$ 由

$$\boldsymbol{N}=\frac{\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v}{\|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v\|} \qquad (7.5)$$

决定。这样一来，单位法向量 $\boldsymbol{N}$ 沿着局部曲面 O 连续地分布。至于在简单曲面的整个域上是否能够决定单位法向量 $\boldsymbol{N}$ 连续地分布，尚不明确。

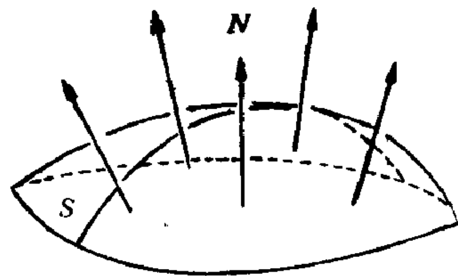


图 2.11

【问题 7.1】 试证下列曲面的法向量 $\boldsymbol{N}$ 的分量$(N_x,\ N_y,\ N_z)$可表示如下。

（1） $x=u$，$y=v$，$z=f(u,\ v)$（即曲面 $z=f(x,\ y)$）。但设 $f(x,\ y)$在 xy 平面的某域上是 C^∞ 函数。

$$N_x=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad N_y=\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad N_z=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$(p=f_x,\quad q=f_y)$$

（2） 回转面 $x=u\cos v$，$y=u\sin v$，$z=\varphi(u)$。但设 $\varphi(u)$为 C^∞ 函数。

$$N_x=\frac{\varphi'\sin v}{\sqrt{u^2+\varphi'^2}},\quad N_y=\frac{\varphi'\cos v}{\sqrt{u^2+\varphi'^2}},\quad N_z=\frac{u}{\sqrt{u^2+\varphi'^2}},\left(\varphi'=\frac{d\varphi}{du}\right)$$

坐标变换 对于曲面S的二坐标邻域O与$\overline{O}$，设$O\cap\overline{O}\neq\varnothing$.设$S$在$O$与$\overline{O}$的局部表示分别为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,\ v),\quad \boldsymbol{x}=\overline{\boldsymbol{x}}(\overline{u},\ \overline{v}) \tag{7.6}$$

又设在$O\cap\overline{O}$上的坐标变换为

$$\overline{u}=\overline{u}(u,\ v),\quad \overline{v}=\overline{v}(u,\ v) \tag{7.7}$$

故将(7.7)代入(7.6)，则在$O\cap\overline{O}$

$$\boldsymbol{x}(u,\ v)=\overline{\boldsymbol{x}}(\overline{u}(u,\ v),\ \overline{v}(u,\ v))$$

成立。偏微分此式两边，则在$O\cap\overline{O}$上得

$$\boldsymbol{x}_u=\frac{\partial\overline{u}}{\partial u}\overline{\boldsymbol{x}}_{\overline{u}}+\frac{\partial\overline{v}}{\partial u}\overline{\boldsymbol{x}}_{\overline{v}},\qquad \boldsymbol{x}_v=\frac{\partial\overline{u}}{\partial v}\overline{\boldsymbol{x}}_{\overline{u}}+\frac{\partial\overline{v}}{\partial v}\overline{\boldsymbol{x}}_{\overline{v}} \tag{7.8}$$

今在点$P\in O\cap\overline{O}$取切向量$\boldsymbol{A}$，设$\boldsymbol{A}$在坐标邻域O与$\overline{O}$的分量分别为

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}\overline{a}\\\overline{b}\end{pmatrix}$$

则由

$$\boldsymbol{A}=a(\boldsymbol{x}_u)_P+b(\boldsymbol{x}_v)_P=\overline{a}(\overline{\boldsymbol{x}}_{\overline{u}})_P+\overline{b}(\overline{\boldsymbol{x}}_{\overline{v}})_P$$

并运用(7.8)得

$$\overline{a}=\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial u}\right)_P a+\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial v}\right)_P b,\qquad \overline{b}=\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial u}\right)_P a+\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial v}\right)_P b \tag{7.9}$$

称之为伴随于坐标变换(7.7)的**向量变换式**。其次设在O与$\overline{O}$内定义的单位法向量分别为$\boldsymbol{N}$与$\overline{\boldsymbol{N}}$，则在$O\cap\overline{O}$内，$\boldsymbol{N}$与$\overline{\boldsymbol{N}}$之间下列关系成立。

$$\overline{\boldsymbol{N}}=\operatorname{sign}\left(\frac{\partial(\overline{u},\overline{v})}{\partial(u,v)}\right)\boldsymbol{N} \tag{7.10}$$

【问题 7.2】 试证上列(7.10).运用$\boldsymbol{N}$的定义式(7.5)与上列(7.8)。

曲面的方向 当曲面S具有满足下述条件(C)的图册$\mathscr{A}$时，就说S是**有向的**，也说$\mathscr{A}$给S一个方向。

(C) 任意取$\mathscr{A}$的两个坐标邻域$(U,\ \theta, O)$与$(\overline{U},\ \overline{\theta},\ \overline{O})$ 如果$O\cap\overline{O}\neq\varnothing$,则对于 $O\cap\overline{O}$上的坐标变换

$$\frac{\partial(\overline{u},\overline{v})}{\partial(u,v)}>0 \tag{7.11}$$

成立。但设$(u,\ v)$与$(\overline{u},\ \overline{v})$分别为在$O$与$\overline{O}$上的坐标。

由(7.10)与(7.11)可得下列事实。

当曲面有方向时，则在整个曲面上能够连续地定义单位法向量$\boldsymbol{N}$。

还知道下列事实。

如果曲面S有方向，则S具有两个方向。

例 7.1 直观地可以理解球面具有方向。仔细调查在例 6.1 里作的球面的 图册 能够证明这件事。

例 7.2 如图 2.12 所示，曲面S叫做 **Möbius 带**.从图 2.12 可见在此曲面 S 全域上不能连续地定义单位法向量$\boldsymbol{N}$，此曲面S没有方向。

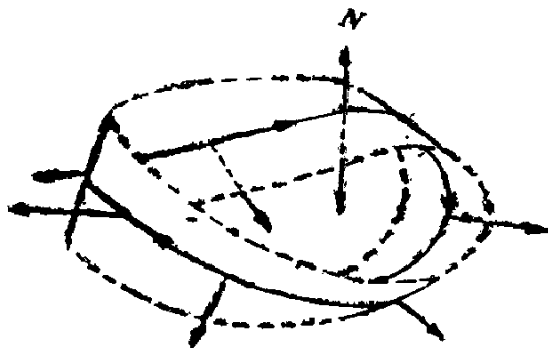


图 2.12

简单曲面的拓扑学性质 首先，下列事实成立。

如果曲面S连通，那末S弧连通。即对于S上两任意点P，Q，存在连结P与Q的（在S上的）曲线。

〈**证明**〉 略。

例 7.3 有二曲面S与T，设T连通，而且$S\subset T$。如果S（在E^3内）是闭集，那末 $S=T$。总之，当曲面S是闭集（做为 E^3的子集)时，以S为真子集的曲面并不存在。证明以上的事实 。 故当曲面

S 是 E^3 内的闭集时，称曲面 S 是**完备**的.

〈**解答**〉 S 为 E^3 的闭集. 因 $S\subset T$，故 $S\cap T=S$. 因此 S 为 T 内的闭集. 其次证明 S 在 T 内是开集. 为此任取点 $P\in S$. 如取曲面 S 的含 P 坐标邻域 O，则存在 E^3 的开集 G（包含 P），$O=S\cap G$. 然因 O 能看做曲面 T 的坐标邻域，故取 E^3 的充分小开集 G'，则 $O=T\cap G'$. 即 O 在 T 内是开集. 因 $P\in S$ 是任意取的，此事实说明 S 在 T 内是开集. 在这里如果运用 T 是连通的，因为 $S\neq\varnothing$，而且 S 是闭集(在 T 内)又是开集，所以 $S=T$. （证毕）

《**注意**》 虽然 E^3 的子集 $S=\{(x, y, z)\mid z=x^2+y^2, z<1\}$ 是一个曲面，但 S 并不完备（E^3 内的闭集）. 而闭集

$$\overline{S}=\{(x, y, z)\mid z=x^2+y^2, z\leqslant 1\}$$

不是曲面. 原因是，对于包含点 $P(1, 0, 1)\in\overline{S}$ 的任何（E^3 的）开集 G，$\overline{S}\cap G$ 与平面的开圆盘不同胚之故. 有时这样的 $\overline{S}$ 叫做**有边界的曲面**.

当曲面 S 做为点集紧致时，称 S 为**紧致**的曲面或**闭曲面**. 如果曲面 S 有界而且是（E^3 内的）闭集时，它是紧致的. 例如球面与环面（参照例 19.4）是闭曲面. 总之，从常识来看，闭曲面是有界而且无边界的曲面，因此紧致曲面叫做闭曲面.

规定 今后在本书里，只考虑连通曲面，如果只说曲面，就是指连通曲面而言.

函数 设给定曲面 S 上的连续函数 $f:S\to R$. 任取 S 的坐标邻域 $(U, \theta, O,)$，复合映射 $f\circ\theta:U\to R$ 是平面的开圆盘 U 上的函数，是二变数 (u, v) 的函数. 用

$$f_o(u, v)$$

表示之，当 $f_o(u,v)$ 是 C^∞ 函数时，则给定的函数 f 叫做曲面 S 上的 **C^∞ 函数**. 这时，$f_o(u, v)$ 叫做 f 在坐标邻域 O 里的**局部表示**，在无含混的可能时，将 $f_o(u, v)$ 记做

$$f(u, v), \quad (\theta(u, v)\in O) \tag{7.12}$$

向量场 对于曲面 S 的各点 P，有 P 处的切向量 X_P 与之对应时，称此对应为向量场 X。在任意坐标邻域 O 内的点 P，

$$X_P = X^1(P)(x_u)_P + X^2(P)(x_v)_P \qquad (7.13)$$

在这里，$P \mapsto X^1(P)$ 与 $P \mapsto X^2(P)$ 分别决定在 O 里定义的函数 X^1 与 X^2。当在 O 里定义的 X^1 与 X^2 是 C^∞ 函数时，给定的向量场 X 叫做 **C^∞ 向量场**。因为今后仅研究 C^∞ 向量场，如果只说**向量场**，就是指的 C^∞ 向量场。向量场 X 在各点 P 的值 X_P 恒为 0 时，X 叫做**零向量场**，以符号 0 记之。若是(7.13)对于任意点 $P \in O$ 都成立，则以

$$X = X^1 x_u + X^2 x_v$$

表示，称之为向量场 X 在坐标邻域 O 的**局部表示**。下列函数组叫做 X 在 O 里的分量。

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}$$

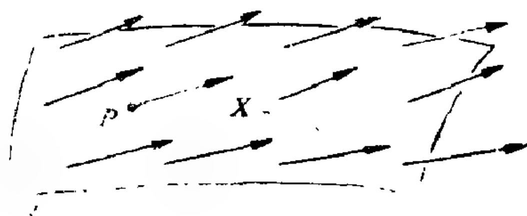


图 2.13

当给定二向量场 X，Y 时，在 S 的各点 P，$Z_P = X_P + Y_P$ 成立的向量 Z 叫做 X 与 Y 之和，以 $Z = X + Y$ 记之。

当给定向量场 X 与 C^∞ 函数 f 时，在 S 的各点 P，$W_P = f(P)X_P$ 成立的向量场 W 叫做 X 的 **f 倍**，以 $W = fX$ 记之。如设 X，Y 在坐标邻域 O 的分量分别为

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix}$$

则 $X + Y$ 与 fX 在 O 的分量分别为

$$\begin{pmatrix} X^1 + Y^1 \\ X^2 + Y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fX^1 \\ fX^2 \end{pmatrix}.$$

设在相交二坐标邻域 O 与 $\bar{O}$ 处，向量场 X 的分量分别为

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{X}^1 \\ \bar{X}^2 \end{pmatrix}$$

在O与$\overline{O}$的坐标分别为(u, v)与$(\overline{u}, \overline{v})$，则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_u &= \frac{\partial \overline{u}}{\partial u}\boldsymbol{x}_{\overline{u}} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial u}\boldsymbol{x}_{\overline{v}}, \\ \boldsymbol{x}_v &= \frac{\partial \overline{u}}{\partial v}\boldsymbol{x}_{\overline{u}} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial v}\boldsymbol{x}_{\overline{v}} \end{aligned} \tag{7.14}$$

成立，故于$O \cap \overline{O}$比较$\boldsymbol{X}$在O与$\overline{O}$的局部表示，并运用(7.14)得

$$\begin{aligned} \overline{X}^1 &= \frac{\partial \overline{u}}{\partial u}X^1 + \frac{\partial \overline{u}}{\partial v}X^2, \\ \overline{X}^2 &= \frac{\partial \overline{v}}{\partial u}X^1 + \frac{\partial \overline{v}}{\partial v}X^2 \end{aligned} \tag{7.15}$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} \overline{X}^1 \\ \overline{X}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial u} & \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial u} & \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} \tag{7.16}$$

它叫做**向量的变换式．**

方向导数　设在曲面S上给定C^∞函数f与向量场$\boldsymbol{X}$．在一坐标邻域里定义C^∞函数

$$(\boldsymbol{X}f)_o = X^1\frac{\partial f}{\partial u} + X^2\frac{\partial f}{\partial v} \tag{7.17}$$

式中设X^1与X^2为$\boldsymbol{X}$在O里的分量．如取另一坐标邻域$\overline{O}$，同样定义$(\boldsymbol{X}f)_{\overline{o}}$，则运用(7.15)在$O \cap \overline{O}$里可以证实

$$(\boldsymbol{X}f)_o = (\boldsymbol{X}f)_{\overline{o}}$$

成立．从而，各$(\boldsymbol{X}f)_o$在曲面S整体上决定一个C^∞函数．此函数以$\boldsymbol{X}f$表示，叫做f在方向$\boldsymbol{X}$上的**方向导数**．对于两个C^∞函数f，g，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}(fg) &= (\boldsymbol{X}f)g + f(\boldsymbol{X}g) \\ \boldsymbol{X}(f+g) &= \boldsymbol{X}f + \boldsymbol{X}g \end{aligned} \tag{7.18}$$

成立．在这样含义下，向量场$\boldsymbol{X}$作用在C^∞函数上，象**微分算子**一样．还有下列事实成立．

如果有两个向量场$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$，对于所有的 C^∞ 函数 f

$$\boldsymbol{X}f=\boldsymbol{Y}f$$

成立时，则$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$。

【问题 7.3】 设P为曲面S的坐标邻域O里的点，$(u(P),v(P))$为其坐标。根据对应 $P\mapsto u(P)$与 $P\mapsto v(P)$ 分别决定在O里定义的函数u与v。它们是C^∞ 函数，叫做在O里的**坐标函数**。对于S上的向量场$\boldsymbol{X}$，

$$X^1=\boldsymbol{X}u,\qquad X^2=\boldsymbol{X}v$$

为$\boldsymbol{X}$在坐标邻域O的分量。试证明之。

对于曲面S上的任意函数f，对应以一个C^∞ 函数 Df 的算子D，如果对于任意的C^∞ 函数 f，g，

$$D(fg)=(Df)g+f(Dg),$$
$$D(f+g)=Df+Dg$$

成立时，则D叫做**微分算子**。当给定微分算子D时，存在一向量场$\boldsymbol{X}$，对于所有的C^∞ 函数 f，$\boldsymbol{X}f=Df$ 成立。（证明略）．由问题〔7.3〕可知，在坐标邻域O，$X^1=Du$，$X^2=Dv$ 为此向量场$\boldsymbol{X}$的分量。

括弧积　当在曲面S上给定二向量场$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$时，对于任意C^∞ 函数f，令

$$[\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}]f=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{Y}f)-\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}f).$$

这时

$$\left.\begin{aligned}&[\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}](fg)=([\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}]f)g+f([\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}]g)\\&[\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}](f+g)=([\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}]f+[\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}]g)\end{aligned}\right.\quad(7.19)$$

成立。故$[\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}]$为一微分算子，即表示一向量场.此向量场$[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]$叫做$\boldsymbol{X}$与$\boldsymbol{Y}$的**括弧积**。

【问题 7.4】 对于任意向量场$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{Z}$，试证下式。

(1)　$[\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}]=-[\boldsymbol{Y},\ \boldsymbol{X}]$

(2)　$[\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Z}]=[\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}]+[\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Z}]$

(3)　$[c\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}]=c[\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}]$　　（c 为常数）

【问题 7.5】 试证上述(7.19)。

【问题 7.6】 对于任意向量场$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{Z}$，试证下式（叫做**雅可比恒等式**）.

$$[\boldsymbol{X}, [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}]] + [\boldsymbol{Y}, [\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}]] + [\boldsymbol{Z}, [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]] = 0 \qquad (7.20)$$

【问题 7.7】 试证以下事实.

（1）当在坐标邻域O里，$\boldsymbol{X}$与$\boldsymbol{Y}$的分量分别为

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix}$$

时，则括弧积$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]$的分量为

$$\begin{pmatrix} \left(X^1 \dfrac{\partial Y^1}{\partial u} + X^2 \dfrac{\partial Y^1}{\partial v}\right) - \left(Y^1 \dfrac{\partial X^1}{\partial u} + Y^2 \dfrac{\partial X^1}{\partial v}\right) \\ \left(X^1 \dfrac{\partial Y^2}{\partial u} + X^2 \dfrac{\partial Y^2}{\partial v}\right) - \left(Y^1 \dfrac{\partial X^2}{\partial u} + Y^2 \dfrac{\partial X^2}{\partial v}\right) \end{pmatrix}$$

（2）〔问题 7.6〕 的(7.20)成立. （运用(1)的结果）

§8 第一基本量

在曲面S上的一点P的切空间$T_P(S)$内，以

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})_P = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \qquad (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in T_P(S))$$

定义**内积**$(\ , \ )_P$. 但右边的$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$表示$E^3$内的内积. 取任意向量场$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$，用对应$P \mapsto (\boldsymbol{X}_P, \boldsymbol{Y}_P)_P$定义的$S$上的$C^\infty$函数以$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$记之，称为向量场$\boldsymbol{X}$与$\boldsymbol{Y}$的**内积**.

设坐标邻域O内的坐标为(u^1, u^2). 到目前为止，坐标邻域内的坐标系用(u, v)表示了，但今后常常改写成$u^1 = u$，$u^2 = v$. 也常常令$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_u$，$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_v$. 设$\boldsymbol{X}$与$\boldsymbol{Y}$在坐标邻域$O$内的分量分别为

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix}$$

则在O内$\boldsymbol{X} = X^1 \boldsymbol{x}_1 + X^2 \boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{Y} = Y^1 \boldsymbol{x}_1 + Y^2 \boldsymbol{x}_2$，故内积$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$在$O$内的局部表示是

$$(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y})=\left(\sum_{j=1}^{2}X^j\boldsymbol{x}_j\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{2}Y^i\boldsymbol{x}_i\right)$$

$$=\sum_{j,i=1}^{2}\boldsymbol{x}_j\cdot\boldsymbol{x}_iX^jY^i$$

于是在坐标邻域O内考虑C^∞ 函数

$$g_{ji}=\boldsymbol{x}_j\cdot\boldsymbol{x}_i \tag{8.1}$$

则在O内

$$(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y})=\sum_{j,i=1}^{2}g_{ji}X^jY^i \tag{8.2}$$

矩阵

$$(g_{ji})=\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix},\quad g_{ji}=g_{ij}$$

在坐标邻域O的各点是对称的正定矩阵，称之为在坐标邻域O内曲面S的**第一基本量**。经典地常常记做

$$E=g_{11},\quad F=g_{12}=g_{21},\quad G=g_{22} \tag{8.3}$$

这时，(8.2)变成

$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=EX^1Y^1+F(X^1Y^2+X^2Y^1)+GX^2Y^2 \tag{8.4}$$

因为(g_{ji})为正定矩阵，所以下式成立。

$$E=g_{11}>0,\quad G=g_{22}>0$$

$$\det(g_{ji})=\begin{vmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{vmatrix}=EG-F^2>0$$

规定 求和符号

$$\sum_{i=1}^{2}\quad 略记之为\quad \sum_{i}\quad 或\quad \sum\nolimits_i$$

此外，除非特殊声明，假设指标h，i，j，k，…，p，q，r等均取值1或2。

长与角 C^∞ 函数

$$\|X\| = \sqrt{(X, X)} = \sqrt{\sum_{j,i} g_{ji} X^j X^i} \qquad (8.5)$$

叫做向量场X的**长或模**。又当$\|X\|$，$\|Y\|$到处不为0时，由

$$\cos\theta = \frac{(X, Y)}{\|X\| \cdot \|Y\|}, \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi) \qquad (8.6)$$

决定的θ叫做向量场X与Y的**夹角**。当夹角θ为$\frac{\pi}{2}$（$(X, Y) = 0$）时，就说X与Y**正交**。

曲面上邻近两点$P(u, v)$，$Q(u + du, v + dv)$间的距离Δs的平方$(\Delta s)^2$可用

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx \cdot dx \\ &= (x_u du + x_v dv) \cdot (x_u du + x_v dv) \\ &\quad g_{11}(du)^2 + 2g_{12} du dv + g_{22}(dv)^2 \end{aligned}$$

逼近，所以

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{j,i} g_{ji} du^j du^i \\ &= E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2 \end{aligned} \qquad (8.7)$$

叫做曲面S的（在坐标邻域O内的）**线素或第一基本形式**，是表示第一基本量的一种方法。

面积 在曲面S上取邻近四点P，Q，R，T，设其坐标分别为

$P(u, v)$，

$Q(u + \varepsilon, v)$

$R(u + \varepsilon, v + \delta)$，

$T(u, v + \delta)$

$(\varepsilon, \delta > 0)$

如图 2.14 所示，P，Q，R，T所围图形$PQRT$的面积可用微小向量$x_u\varepsilon$与$x_v\delta$为二边作平行四边形的面积

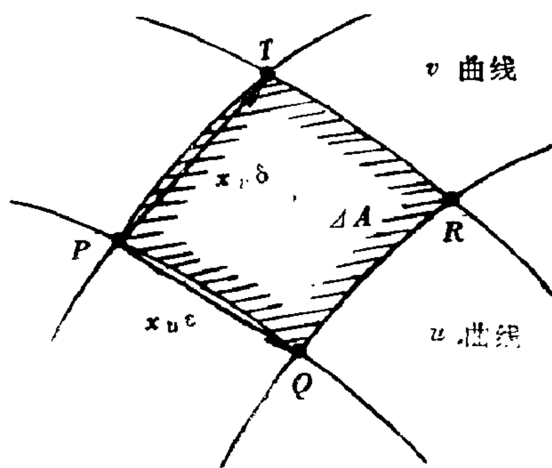


图 2.14

$$d\sigma = \|\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v\| \varepsilon\delta$$

逼近。因为

$$\|\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v\|^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g$$

所以得

$$d\sigma = \sqrt{g}\, \varepsilon\delta, \quad g = \det(g_{ji}) \tag{8.8}$$

式中 $\det(g_{ji})$表示矩阵(g_{ji})的行列式。故包含于一坐标邻域 (U, θ, O)内的有界闭域 $D(\subset O)$的面积 A 由二重积分

$$A = \iint_{\theta^{-1}(D)} \sqrt{g}\, dudv$$

决定。上式右边简单地记做

$$A = \iint_D \sqrt{g}\, dudv, \quad \sqrt{g} = \|\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v\| \tag{8.9}$$

于是，由(8.8)决定的 $d\sigma$ 记做

$$d\sigma = \sqrt{g}\, dudv = \sqrt{EG - F^2}\, dudv \tag{8.10}$$

称之为曲面 S 的(在坐标邻域 O 内的)**面积素**.对于 S 上的连续函数 f，二重积分

$$\iint_D f\sqrt{g}\, dudv = \iint_D f d\sigma \tag{8.11}$$

叫做 f 在 D 上的**积分**，用右边的符号表示之。当域 D 很大，包含于两个以上坐标邻域内时，上述积分(8.9)与(8.11)以后再加论述。(参照 p.51)。

曲面 S 上的（正则）曲线 $c: I \to S(I = [a, b])$ 之长，根据定理1.1由

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}\| dt$$

决定。如果做为图形的曲线 $c(I)$ 包含于一个坐标邻域 O 内时，由(2.5)与(8.5)知

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{\sum_{j,i} g_{ji}(u^1(t), u^2(t)) \frac{du^j(t)}{dt} \frac{du^i(t)}{dt}}\, dt.$$

式中曲线 c 用方程 $u = u^1(t)$，$v = u^2(t)$表示了。简略地用

$$L(c)=\int_a^b\sqrt{\sum_{j,i}g_{ji}\frac{du^j}{dt}\frac{du^i}{dt}}\,dt \qquad (8.12)$$

表示。对于未必是正则的曲线 c，(8.12)也表示其长。当 $c(I)$没包含在一个坐标邻域内时，将闭区间 I 适当地分割成有限个闭区间 I_1，…，I_r 可使 $c(I_1)$，…，$c(I_r)$分别包含于一个坐标邻域。于是，设 c_1，…，c_r 分别为 c 在I_1，…，I_r 上的限制，则用（8.12）计算 $L(c_1)$，…，$L(c_r)$，作它们的和可得曲线 c 的长 $L(c)$为

$$L(c)=L(c_1)+\cdots+L(c_r)$$

距离 在曲面 S 上任意取两点 P，Q，令

$$D(P,Q)=\text{g.l.b.}\,L(c)$$

但设关于连结 P，Q 的所有正则曲线取 g.l.b. 即对于连结 P，Q 的任意曲线 c，

$$D(P,\ Q)\leqslant L(c)$$

对于任意正数 ε，存在连结 P 与 Q 的正则曲线 c' 满足

$$D(P,Q)+\varepsilon\geqslant L(c')$$

这时下列事实成立（参照例 8.1）.

设 P，Q，R 为曲面 S 上的任意点，则

(i) $D(P,\ Q)=D(Q,\ P)$

(ii) $D(P,\ R)\leqslant D(P,\ Q)+D(Q,\ R)$

(iii) $D(P,\ Q)\geqslant 0$，$D(P,\ Q)=0\Longleftrightarrow P=Q$

总之，D 满足距离公理。从而，$D(P,\ Q)$叫做二点 P，Q 在曲面 S 内的**距离**。设 P，Q 在 E^3内的距离为 $d(P,\ Q)$，显然下式成立.

$$D(P,\ Q)\geqslant d(P,\ Q)$$

例 8.1 试证上述(i)，(ii)，(iii)。

〈**解答**〉 (i) 的证明．因为曲线的长与其方向无关，所以显然 (i) 成立。

(ii) 的证明，对于任意 $\varepsilon>0$，有连结 P 与 Q 的正则曲线 c_1 使得

$$D(P,\ Q)+\varepsilon\geqslant L(c_1)$$

此外，有连结 Q 与 R 的正则曲线 c_2 使得

$$D(Q,\ R)+\varepsilon \geqslant L(c_2)$$

连结 c_1 与 c_2 得折曲线，但在连结P与Q的正则曲线c中存在满足

$$L(c)\leqslant L(c_1)+L(c_2)+\varepsilon$$

者．故

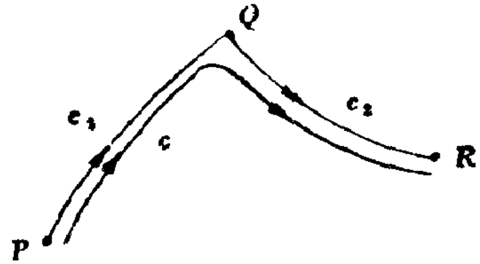


图 2.15

$$D(P,\ R)\leqslant L(c)\leqslant L(c_1)+L(c_2)+\varepsilon\leqslant D(P,\ Q)+D(Q,\ R)+3\varepsilon$$

然因 ε 为任意正数，故得

$$D(P,\ R)\leqslant D(P,\ Q)+D(Q,R)$$

(iii) 的证明．设P，Q间在E^3 的距离为 $d(P,\ Q)$，则

$$D(P,\ Q)\geqslant d(P,\ Q)\geqslant 0$$

其次，设 $D(P,\ Q)=0$，由上式可见，$d(P,\ Q)=0$，故得 $P=Q$．反之，如果 $P=Q$，显然 $D(P,\ Q)=0$．（证毕）

运用上述定义的距离D可得曲面S为距离空间$(S,\ D)$．当此距离空间$(S,\ D)$完备时，称曲面S是**完备**的．这种定义与 § 7（参照 p.39）定义的完备性等价（证略）．

连结曲面S上两点P，Q的正则曲线c中，如存在 $L(c)=D(P,\ Q)$，则 c 叫做连结P与Q的**短程线**．就平面而言，连结二点的短程线是线段，它必然有而且只有一条．但在曲面上一般地说这样事实未必成立，例如，在从平面上去掉一点P_0而得的曲面S上，考虑如图 2.16所示两点P与Q，不论怎样作如图所示曲线 c，$L(c)>D(P,\ Q)$，故不存在连结P与Q的短程线，但如果曲面S完备，人们知道连结S上任意两点P，Q，的短程线是存在的（证略）．

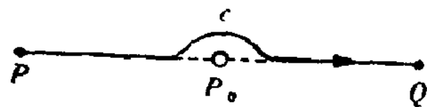


图 2.16

例如，球面是完备的，连结对径点P，Q的最短线是半大圆，这样的短程线（半圆）无穷多．

【问题 8.1】 试证下列事实。

(1) 曲面上 u 曲线与 v 曲线的夹角 θ，由

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

决定。

(2) u 曲线与 v 曲线正交的充要条件是 $F=0$。

【问题 8.2】 对于以下曲面，试证其第一基本量如下所示。

(1) 球面：$x=a\cos u\cos v$，$y=a\cos u\sin v$，$z=a\sin u$

$$\left(a>0,\ -\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2},\ 0<v<2\pi\right)$$

但设 $u^1=u$。$u^2=v$。

$$(g_{ji})=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\cos^2 u \end{pmatrix}$$

(2) 曲面：$z=f(x,y)$。但设 $f(x,y)$ 在 xy 平面的某域上是 C^∞ 函数，但设 $u^1=x$，$u^2=y$。

$$(g_{ji})=\begin{pmatrix} 1+p^2 & pq \\ pq & 1+q^2 \end{pmatrix},\quad (p=f_x,\ q=f_y)$$

(3) 回转面：$x=u\cos v$，$y=u\sin v$，$z=\varphi(u)$.但设 $\varphi(u)$ 为 C^∞ 函数，以及 $u^1=u$，$u^2=v$。

$$(g_{ji})=\begin{pmatrix} 1+\varphi'^2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix},\qquad \varphi'=\frac{d\varphi}{du}$$

【问题 8.3】 设曲面在坐标邻域 O 内的坐标为 (u,v).设微分方程

$$E\frac{du}{dv}+F=0$$

的通解为 $u=f(v,\ a)$，（a 为任意常数）．此微分方程的通解表示的曲线族中曲线与 u 曲线正交。试证明之。

《**注意**》由〔问题 8.3〕可见，在曲面 S 的各坐标邻域 O 内存在互相正交的两组曲线族。即在 O 内适当地变换坐标系可使新坐标系的坐标曲线互相垂直。

坐标变换 设二坐标邻域 O与$\overline{O}$ 的坐标分别为$(u,v)=(u^1,u^2)$，$(\overline{u},\ \overline{v})=(\overline{u}^1,\ \overline{u}^2)$，则在 $O\cap\overline{O}$ 里

$$
\begin{aligned}
x_{\overline{u}} &= \frac{\partial u}{\partial \overline{u}} x_u + \frac{\partial v}{\partial \overline{u}} x_v, \\
x_{\overline{v}} &= \frac{\partial u}{\partial \overline{v}} x_u + \frac{\partial v}{\partial \overline{v}} x_v
\end{aligned}
\tag{8.13}
$$

成立。故于 $O\cap\overline{O}$

$$
\begin{aligned}
\overline{g}_{11} &= x_{\overline{u}}\cdot x_{\overline{u}} \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial \overline{u}}\right)^2 g_{11} + \frac{\partial u}{\partial \overline{u}}\frac{\partial v}{\partial \overline{u}} g_{12} + \\
&\quad + \frac{\partial v}{\partial \overline{u}}\frac{\partial u}{\partial \overline{u}} g_{21} + \left(\frac{\partial v}{\partial \overline{u}}\right)^2 g_{22}
\end{aligned}
$$

成立。一般地说，在 $O\cap\overline{O}$ 里下列关系式成立。

$$
\overline{g}_{ji} = \sum_{p,q} \frac{\partial u^q}{\partial \overline{u}^j}\frac{\partial u^p}{\partial \overline{u}^i} g_{qp} \tag{8.14}
$$

这是**第一基本量的变换式**。故在 $O\cap\overline{O}$ 里

$$
\begin{aligned}
\overline{g} &= \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})}\right)^2 g, \\
g = \det(g_{ji}), &\qquad \overline{g} = \det(\overline{g}_{ji}) \\
\therefore\quad \sqrt{\overline{g}} &= \pm\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})}\sqrt{g}
\end{aligned}
\tag{8.15}
$$

但在(8.15)里，要选择复号 [1] 号使右边为正。

积分 当曲面S上的有界闭域D包含在 $O\cap\overline{O}$ 内，假设在 $O\cap\overline{O}$ 里

$$
\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})}>0 \tag{8.16}
$$

成立，从(8.15)可见

$$
\sqrt{\overline{g}} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})}\sqrt{g} \tag{8.17}
$$

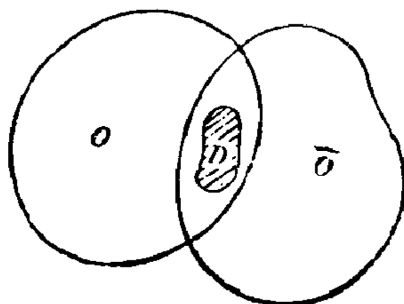


图 2.17

1) 复号即±号。(译者注)

这时，用两种方式表示(8.11)的积分，得

$$\iint_D f\sqrt{g}\,dudv,$$

$$\iint_D f\sqrt{\overline{g}}\,d\overline{u}d\overline{v}$$

将(8.17)代入第二积分，作积分变数的变换得

$$\iint_D f\sqrt{\overline{g}}\,d\overline{u}d\overline{v}=\iint_D f\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})}\sqrt{g}\,\frac{\partial(\overline{u},\overline{v})}{\partial(u,v)}dudv$$

$$=\iint_D f\sqrt{g}\,dudv \qquad (8.18)$$

上列二积分值一致．故当(8.16)成立时，积分(8.11)的值与包含有界闭域D的坐标邻域的选法无关。

于是**设曲面S有向**，图册$\mathscr{S}$给S以方向．这时，将任意给定的S上的有界闭域D分割为有限个闭域D_1，D_2，$\cdots$,D_r使得各D_1,D_2，$\cdots$，D_r包含于$\mathscr{S}$的一坐标邻域里，因为

$$\iint_{D_\alpha} f\sqrt{g}\,dudv,\ (\alpha=1,\ \cdots,\ r) \qquad (8.19)$$

与包含D_α的属于$\mathscr{S}$的坐标邻域的选择无关，所以设

$$\iint_D f d\sigma=\sum_{\alpha=1}^{r}\iint_{D_\alpha} f\sqrt{g}\,dudv \qquad (8.20)$$

称之为函数f在D上的**积分**，以左边的符号表示。

《**注意**》当曲面S不具有方向时，一般地说不能定义积分(8.20)．当曲面S有向时，积分(8.20)的值与域D的分割方法无关一事是应该证明的，但证明从略。

第一基本量的反变分量　在坐标邻域O内，考虑由第一基本量所作矩阵的逆矩阵，令它是

$$(g^{ji})=(g_{ji})^{-1} \qquad (8.21)$$

则(g^{ji})叫做**第一基本量的反变分量**．相应地(g_{ji})有时叫做**共变分量**。因为(g_{ji})是对称矩阵，所以$(g^{ji})=(g_{ji})^{-1}$也是对称矩阵．总之

$$g^{ji}=g^{ij}.$$

其次，因为$(g^{ji})(g_{ji})=(g_{ji})(g^{ji})$为单位矩阵，故下式成立。

$$\sum_k g^{jk}g_{ki}=\delta^j_i, \quad \sum_k g_{ik}g^{kj}=\delta^j_i \tag{8.22}$$

式中 δ^j_i 是由

$$\delta^j_i=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

定义的符号，称之为**克朗纳格的 δ**。

再有，对于相交的坐标邻域 O 与 $\overline{O}$，因为在 $O\cap\overline{O}$ 里(8.14)成立，所以在 $O\cap\overline{O}$ 里下列变换式成立：设 $(\overline{g}^{ji})=(\overline{g}_{ji})^{-1}$，则

$$\overline{g}^{ji}=\sum_{p,q}\frac{\partial\overline{u}^j}{\partial u^q}\frac{\partial\overline{u}^i}{\partial u^p}g^{qp} \tag{8.23}$$

【问题 8.4】 试证上述(8.23)。

§9 第二基本量 全曲率

对于曲面 S 上的各点 P，对应以 E^3 内的向量 $A(P)$ 时，则称此对应为 S 上的**向量函数** A。当取 S 的任意坐标邻域 (U, θ, O) 时，在 U 上定义的向量函数 $A\circ\theta$ 为 O 内的坐标 (u, v) 的函数 $A(u,v)$。当此向量函数 $A(u,v)$ 与 O 的选法无关，总是 C^∞ 函数时，则称 S 上的向量函数 A 是 C^∞ 级的。

当给定 S 的向量场 X 与 S 上定义的 C^∞ 向量函数 A（A 不必要切于 S）时，设它们在 O 内分别呈

$$X=\sum_i X^i x_i, \quad A(u, v)=\begin{pmatrix}A_x(u,v)\\ A_y(u,v)\\ A_z(u,v)\end{pmatrix}$$

的形状，则考虑在 S 上新定义的 C^∞ 向量函数

$$\partial_X A=\begin{pmatrix}\sum_i X^i\partial A_x/\partial u^i\\ \sum_i X^i\partial A_y/\partial u^i\\ \sum_i X^i\partial A_z/\partial u^i\end{pmatrix}$$

称之为 A 关于 X 的**方向导函数**，用左边的符号表示。此外，上式右边

的值与所用坐标邻域O的选法无关。

取曲面S的坐标邻域(U,θ,O)，在O里的单位法向量$\boldsymbol{N}$是定义在局部曲面O上的C^∞向量函数.取S上的向量场$\boldsymbol{X}$，则$\partial_X\boldsymbol{N}$与$\boldsymbol{N}$垂直（因$\boldsymbol{N}$之长恒为1之故）。故$\partial_X\boldsymbol{N}$在各点与S相切。今令

$$L(\boldsymbol{X}) = -\partial_X\boldsymbol{N} \tag{9.1}$$

则$L(\boldsymbol{X})$是定义在坐标邻域O内的向量场，故可令

$$L(\boldsymbol{X}) = \left(\sum_i H_i{}^1 X^i\right)\boldsymbol{x}_1 + \left(\sum_i H_i{}^2 X^i\right)\boldsymbol{x}_2 \tag{9.2}$$

式中设在O内$\boldsymbol{X} = \sum_i X^i \boldsymbol{x}_i$。这里得到的对应$L:\boldsymbol{X} \mapsto L(\boldsymbol{X})$叫做**温加顿映射**，它具有以下性质：对于任意的C^∞函数f与任意的向量场$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$，有

$$L(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) = L(\boldsymbol{X}) + L(\boldsymbol{Y}),\quad L(f\boldsymbol{X}) = fL(\boldsymbol{X}) \tag{9.3}$$

在(9.2)里出现的，定义在O里的C^∞函数$H_i{}^h$所作矩阵

$$(H_i{}^h) \tag{9.4}$$

表示温加顿映射，称之为**第二基本量的混合分量**。

其次，对于向量场$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$，作C^∞函数

$$H(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) = (L(\boldsymbol{X}),\ \boldsymbol{Y}) \tag{9.5}$$

则H具备下列性质。

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) &= H(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}) \\ H(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}) &= H(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Z}) + H(\boldsymbol{Y},\ \boldsymbol{Z}) \\ H(f\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y}) &= fH(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \end{aligned} \tag{9.6}$$

式中$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{Z}$为任意向量场，f为任意C^∞函数。

〈**(9.6)的证明**〉 首先由(9.3)与内积的性质显然(9.6)的第2，第3式成立。再对u^j微分

$$\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{N} = 0$$

的两边，得

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial u^j} \cdot \boldsymbol{N} + \boldsymbol{x}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial u^j} = 0$$

然因

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial u^j}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial u^j \partial u^i}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial u^i \partial u^j}=\frac{\partial \boldsymbol{x}_j}{\partial u^i}$$

故

$$\boldsymbol{x}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial u^j}=\boldsymbol{x}_j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial u^i}$$

由此可见

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j) &= (L(\boldsymbol{x}_i),\boldsymbol{x}_j) = -(\partial_{\boldsymbol{x}_i}\boldsymbol{N},\boldsymbol{x}_j) \\ &= -\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial u^i}\cdot \boldsymbol{x}_j = -\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial u^j}\cdot \boldsymbol{x}_i = -(\partial_{\boldsymbol{x}_j}\boldsymbol{N},\boldsymbol{x}_i) \\ &= H(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{x}_i) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad H(\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{x}_j)=H(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{x}_i) \tag{9.7}$$

运用此式以及(9.6)的第 2，第 3 式可得下式.

$$H(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=H(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}) \qquad \text{（证毕）}$$

由以上证明可见，下列公式成立。

公式

$$H_{ji}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial u^j \partial u^i}\cdot \boldsymbol{N}=-\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial u^j}\cdot \boldsymbol{x}_i$$

$$=-\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial u^i}\cdot \boldsymbol{x}_j=H_{ij} \tag{9.8}$$

在计算 H_{ji} 时，可使用此公式。

对应 $H:(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y})\mapsto H(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 叫做曲面 S 的（在坐标邻域 O 里的）**第二基本张量**，C^∞ 函数

$$H_{ji}=H(\boldsymbol{x}_j,\ \boldsymbol{x}_i)$$

所作矩阵

$$(H_{ji})$$

叫做**第二基本量**. 从(9.7)可见，(H_{ji})为对称矩阵。

将 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{x}_i$ 代入(9.5)，并用(9.2)可得

$$H_{ji}=\sum_h H_j{}^h g_{hi} \tag{9.9}$$

反之，下式成立。

$$H_j{}^h = \sum_i H_{ji} g^{ih} \tag{9.10}$$

〈(9.10)的证明〉 向(9.9)的两边乘 g^{ih}，并关于 i 求和得

$$\sum_i H_{ji} g^{ih} = \sum_h H_j{}^h \left(\sum_i g_{hi} g^{ih} \right)$$

在这里再运用(8.22)，将右边变形得

$$\sum_i H_{ji} g^{ih} = \sum_h H_j{}^h \delta_h{}^k = H_j{}^k \qquad \text{（证毕）}$$

经典地看，令第二基本量为

$$L = H_{11},\quad M = H_{12} = H_{21},\quad N = H_{22} \tag{9.11}$$

有时也写做

$$(H_{ji}) = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

此外，下列公式成立。

公式

$$H_{ji} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial u^j \partial u^i} \cdot \boldsymbol{N}$$

$$H_{ji} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left| \boldsymbol{x}_1 \;\; \boldsymbol{x}_2 \;\; \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial u^j \partial u^i} \right|, \tag{9.12}$$

$$g = \det(g_{ji})$$

即 $$L = \boldsymbol{x}_{uu} \cdot \boldsymbol{N},\quad M = \boldsymbol{x}_{uv} \cdot \boldsymbol{N},\quad N = \boldsymbol{x}_{vv} \cdot \boldsymbol{N} \tag{9.12$'$}$$

〈证明〉 因为 $H_{ji} = H(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_i)$，所以运用(9.8)得

$$H_{ji} = -\boldsymbol{x}_j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial u^i} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial u^j \partial u^i} \cdot \boldsymbol{N}$$

将(7.5)与$\sqrt{g} = \|\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v\|$（参照§8）代入此式得所求公式(9.12)。

（证毕）

例 9.1 在球面$S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$，$(a>0)$上的点$P(x, y, z)$处，单位法向量$\boldsymbol{N}$的分量可看做

$$N=\begin{pmatrix}-x/a\\-y/a\\-z/a\end{pmatrix}$$

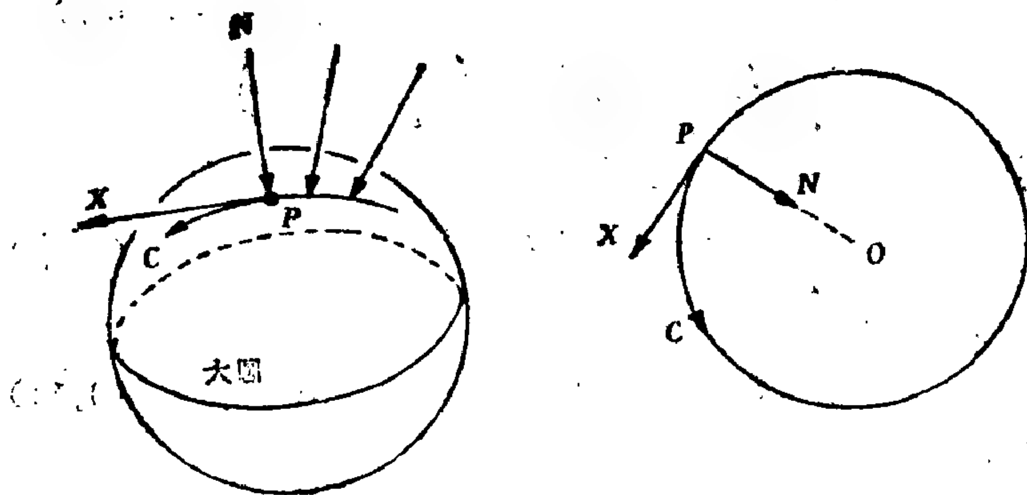


图. 2.18

在点P取球面S的切向量X，通过点P，画一个大圆与X相切，可见（参照上图 2.18）温加顿映射变为

$$L(X)=-\partial_X N=\frac{1}{a}X$$

因上式对于任意向量场X成立，故得

$$H_i{}^h=\frac{1}{a}\delta_i{}^h$$

因此，对此球面第二基本量为

$$(H_{ji})=\frac{1}{a}(g_{ji}) \tag{9.13}$$

【问题 9.1】 以球面方程

$$x=a\cos u\cos v,\quad y=a\cos u\sin v,\quad z=a\sin u$$

为基础，运用公式(9.12)来证明(9.13)。

例 9.2 如图 2.19 在圆柱面上取u曲线与v曲线，考虑单位法向量N。这时，由温加顿映射得

$$L(x_u)=-\frac{\partial N}{\partial u}=\frac{1}{a}x_u$$

$$L(x_v) = -\frac{\partial N}{\partial v} = 0$$

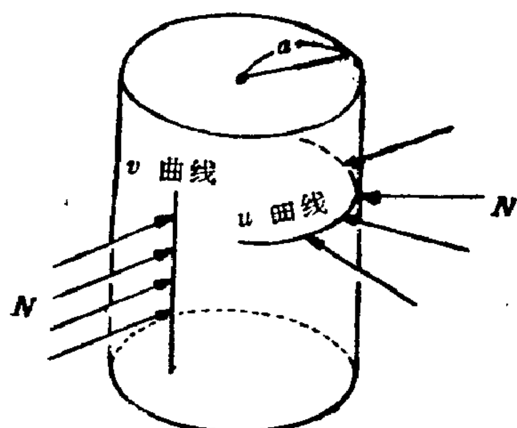


图 2.19

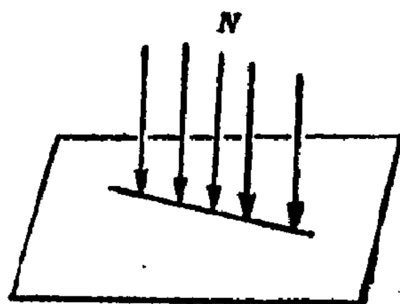


图 2.20

故关于此圆柱面有

$$(H_{ji}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即

$$L = \frac{1}{a}, \qquad M = N = 0 \tag{9.14}$$

【问题 9.2】以圆柱面的方程 $x = a\cos u$, $y = a\sin u$, $z = v$ 为基础来证明(9.14).

例 9.3 对于平面能选取单位法向量N互相平行，因此对于任意向量场X

$$L(X) = -\partial_X N = 0$$

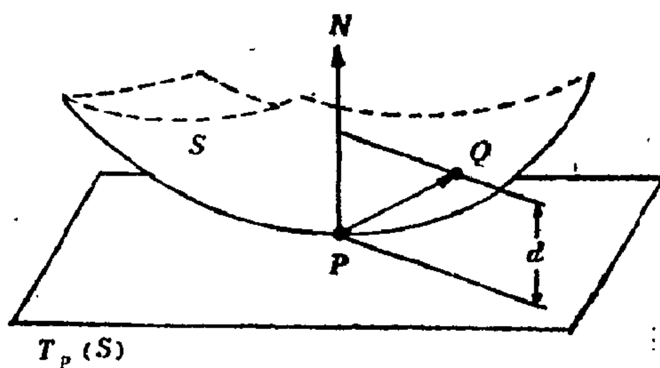


图 2.21

故对于平面

$$(H_{ji}) = 0$$

即
$$L = M = N = 0$$

在曲面S的坐标邻域O里取邻近两点P，Q，设其坐标分别为(u,v)，$(u+\varepsilon,\ v+\delta)$，设局部曲面$O$的方程为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,\ v)$，这时能将向量$\overrightarrow{PQ}$展开如下

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}&=\boldsymbol{x}(u+\varepsilon,\ v+\delta)-\boldsymbol{x}(u,\ v)\\&=\boldsymbol{x}_u\varepsilon+\boldsymbol{x}_v\delta+\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_{uu}\varepsilon^2+\\&\quad+2\boldsymbol{x}_{uv}\varepsilon\delta+\boldsymbol{x}_{vv}\delta^2)+\\&\quad+\text{（高次项）}\end{aligned}$$

取此式两边与$\boldsymbol{N}$的内积，可见从Q到P处的切平面$T_P(S)$的有向垂线之长d能够用下式逼近。

$$d\doteq\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_{uu}\varepsilon^2+2\boldsymbol{x}_{uv}\varepsilon\delta+\boldsymbol{x}_{vv}\delta^2)\cdot\boldsymbol{N}$$

如运用(9.12)′得

$$d\doteq\frac{1}{2}(L\varepsilon^2+2M\varepsilon\delta+N\delta^2)\qquad(9.15)$$

这是第二基本量的几何意义之一。令 $\varepsilon=du$，$\delta=dv$，称

$$\begin{aligned}\text{II}&=L(du)^2+2M\,du\,dv+N(dv)^2\\&=\sum_{j,i}H_{ji}du^j du^i\end{aligned}\qquad(9.16)$$

为曲面S的（在坐标邻域O里的）**第二基本形式.**

坐标变换 由(7.10)可见，在二坐标邻域O，$\overline{O}$的公共部分

$$\overline{\boldsymbol{N}}=\text{sign}\left(\frac{\partial(\overline{u},\overline{v})}{\partial(u,v)}\right)\boldsymbol{N}$$

成立。而向量场$\boldsymbol{X}$的分量的变换式(7.9)可写做

$$\overline{X}^h=\sum_i\frac{\partial\overline{u}^h}{\partial u^i}X^i\qquad(9.17)$$

然用(9.12)，设在$\overline{O}$内的第二基本量为$\overline{H}_{ji}$，则在$O\cap\overline{O}$内

$$\overline{H}_{ji}=\frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial\overline{u}^j\partial\overline{u}^i}\cdot\overline{\boldsymbol{N}}$$

$$=\text{sign}\left(\frac{\partial(\overline{u},\overline{v})}{\partial(u,v)}\right)\sum_{q,p}\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial u^q\partial u^p}\ \frac{\partial u^q}{\partial\overline{u}^j}\ \frac{\partial u^p}{\partial\overline{u}^i}+\right.$$

$$+\sum_{p}\frac{\partial x}{\partial u^p}\quad\frac{\partial^2 u^p}{\partial\overline{u}^j\partial\overline{u}^i}\Bigg)\cdot N$$

$$\therefore\quad \overline{H}_{ji}=\operatorname{sign}\left(\frac{\partial(\overline{u},\overline{v})}{\partial(u,v)}\right)\sum_{q,p}H_{q,p}\frac{\partial u^q}{\partial\overline{u}^j}\quad\frac{\partial u^p}{\partial\overline{u}^i}\qquad(9.18)$$

成立。这是**第二基本量的变换式**.在这里如利用(9.17)和(9.18),设在 $\overline{O}$ 的温加顿映射为 $\overline{L}(X)$, 第二基本张量为$\overline{H}(X, Y)$, 则在 $O\cap\overline{O}$

$$\begin{aligned}\overline{L}(X)&=\operatorname{sign}\left(\frac{\partial(\overline{u},\overline{v})}{\partial(u,v)}\right)L(X)\\ \overline{H}(X,Y)&=\operatorname{sign}\left(\frac{\partial(\overline{u},\overline{v})}{\partial(u,v)}\right)H(X,Y)\end{aligned}\qquad(9.19)$$

成立。

全曲率　在各坐标邻域 O 里，考虑 C^∞ 函数

$$K=\frac{\det(H_{ji})}{\det(g_{ji})}=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}\qquad(9.20)$$

运用(8.15)与(9.18),可以证明 K 是在整个曲面 S 上定义的 C^∞函数。称此 K 为曲面 S 的**全曲率**或**高斯曲率**。

【问题 9.3】　以 (2.20) 定义的全曲率 K 是在整个曲面 S 上定义的 C^∞ 函数。试证明之。

在各坐标邻域里,K 的符号与$\det(H_{ji})$的符号一致.(因$\det g_{ji})>0$(之故).故参照(9.15)，可将曲面上的点分成三类。

(i)　满足 $K>0$ 的点叫做**椭圆点**。

(ii)　满足 $K<0$ 的点叫做**双曲点**。

(iii)　满足 $K=0$ 的点叫做**抛物点**。

(i)　在**椭圆点** P,因$LN-M^2>0$,故(9.15)的 d 总是正的.因此，在 P 点的附近， 曲面 S 只在点 P 处的切平面的一侧， 呈 下 图 2.22 (i) 的形状。

(ii)　在**双曲点** P,因 $LN-M^2<0$,故(9.15)的 d 随着(ε,δ)的比

的变化，可为正，可为负，因此在 P 的附近，曲面 S 分布在点 P 处的切平面的两侧，呈下图 2.22 (ii)的形状。

(iii) **在抛物点** P，$LN-M^2=0$，故如 $L^2+M^2+N^2\neq 0$，则 $d=(a\varepsilon+b\delta)^2$，在点 P 的附近，曲面 S 在点 P 的切平面的同侧，而且呈下图 2.22(iii)的形状。又当 $L=M=N=0$ 时，这点叫做**平点**。在平点 P 的附近，曲面 S 的形状决定于 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 的高阶偏导数在点 P 处的值，情况更加复杂。

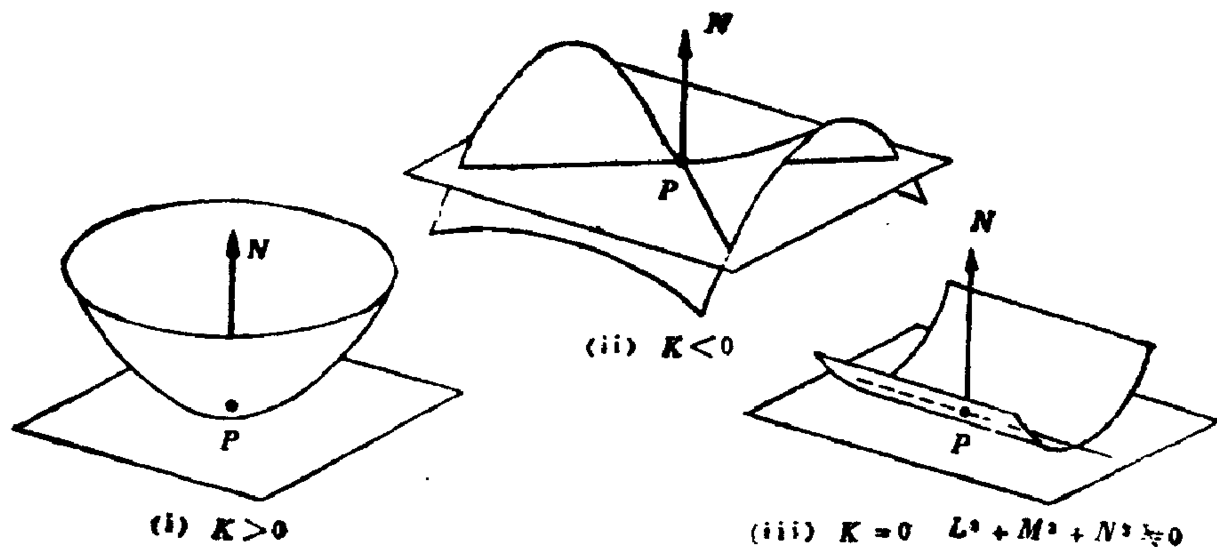


图 2.22

【问题 9.4】 设曲面 S 上一点 P 为原点，取 P 处的切平面为 xy 平面，并设 S 在点 P 附近的方程可用 $z=f(x,y)$ $(x=u,\ y=v,\ z=f(u,v))$ 表达，试证

$$f(x,y)=\frac{1}{2}(Lx^2+2Mxy+Ny^2)+\text{（高次项）}$$

但 L，M，N 分别表示该量在 P 处的值。

例 9.4 关于环面

$$x=(b+a\sin u)\cos v,$$
$$y=(b+a\sin u)\sin v,$$
$$z=a\cos u,\qquad (b>a>0)$$

$$\boldsymbol{x}_u=\begin{pmatrix} a\cos u\cos v \\ a\cos u\sin v \\ -a\sin u \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_v=\begin{pmatrix} -(b+a\sin u)\sin v \\ (b+a\sin u)\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore E=\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_u=a^2,\quad F=\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_v=0,\quad G=\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{x}_v=(b+a\sin u)^2$$

$$\therefore\quad g=EG-F^2=a^2(b+a\sin u)^2$$

$$\therefore\qquad \boldsymbol{N}=\frac{\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v}{\sqrt{g}}=\begin{pmatrix} \sin u\cos v \\ \sin u\sin v \\ \cos u \end{pmatrix}$$

此外

$$\boldsymbol{x}_{uu}=\begin{pmatrix} -a\sin u\cos v \\ -a\sin u\sin v \\ -a\cos u \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_{uv}=\begin{pmatrix} -a\cos u\sin v \\ a\cos u\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_{vv}=\begin{pmatrix} -(b+a\sin u)\cos v \\ -(b+a\sin u)\sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\qquad L=\boldsymbol{x}_{uu}\cdot\boldsymbol{N}=a,\quad M=\boldsymbol{x}_{uv}\cdot\boldsymbol{N}=0$$

$$N=\boldsymbol{x}_{vv}\cdot\boldsymbol{N}=(b+a\sin u)\sin u$$

$$\therefore\qquad K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{\sin u}{a(b+a\sin u)}$$

故在环面上，椭圆点，双曲点，抛物点的分布如图 2.23 所示。即椭圆点的集为

$$0<u<\pi;$$

双曲点的集为

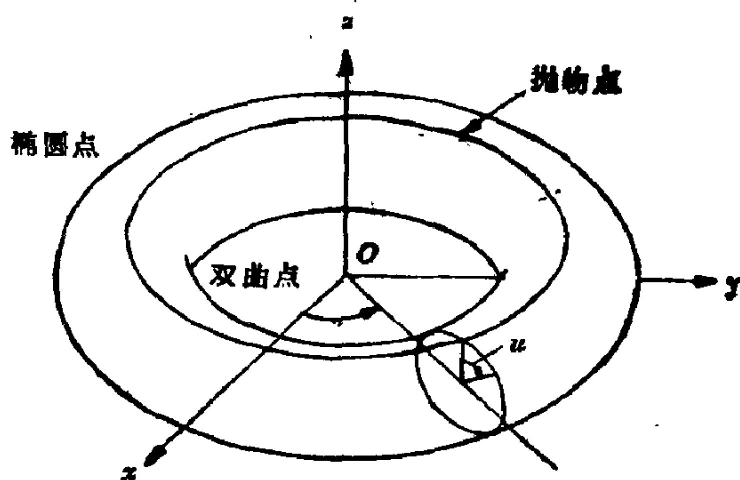


图 2.23

$$\pi<u<2\pi;$$

抛物点的集为

$$u=0 \qquad 与 \qquad u=\pi$$

至于此环面的全面积 A 由下式决定。

$$A=\iint_{\substack{0<u<2\pi \\ 0<v<2\pi}}\sqrt{g}\,du dv=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} a(b+a\sin u)du dv=4\pi^2 ab.$$

【问题 9.5】 运用例 9.1，例 9.2，例 9.3，试证下列事实。

(1)　对于半径 a 的球面 $K=\frac{1}{a^2}$。

(2)　对于圆柱面与平面 $K=0$。

§10　主曲率　平均曲率

设给定了曲面 S 上一点 P 与 P 处的单位切向量 $\boldsymbol{A}$。作平面 π_A 通过点 P，向量 $\boldsymbol{A}$ 以及 P 处的单位法向量 $\boldsymbol{N}$，设 π_A 与 S 的交线为 c。设曲线 c 的参数为弧长 s，$c(0)=P$。这时 $c'(0)=\boldsymbol{A}$(参照图 2.24)。设 c 的参数表示为 $u=u(s)$，$v=v(s)$；曲面 S 的参数表示为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$，则在 E^3 里，可用 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u(s),v(s))$ 表示 c。再说

$$\kappa \boldsymbol{n} = \boldsymbol{x}'' = \sum_i \frac{d^2u^i}{ds^2} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^i} + \sum_{j,i} \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds} \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial u^j \partial u^i}$$

成立。式中 $\boldsymbol{n}$ 与 κ 分别为 c 的单位主法向量与曲率。可是，在点 P，$\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{N}$ 平行。故在点 P 考虑上式，与 P 处的 $\boldsymbol{N}$ 作内积得

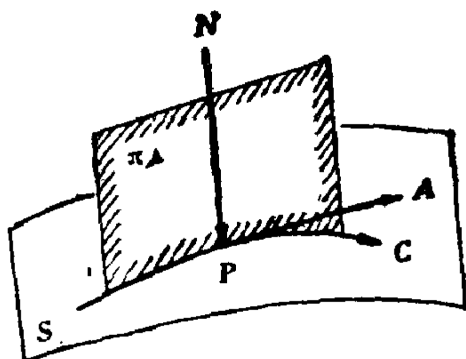


图 2.24

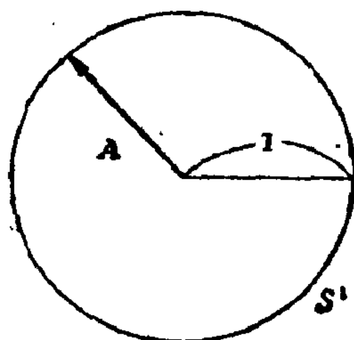


图 2.25

$$\varepsilon \kappa_P = \sum_{j,i} \left[\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial u^j \partial u^i} \right)_P \cdot \boldsymbol{N}_P \right] \xi^j \xi^i$$

式中设 $\boldsymbol{A} = \xi^1 (\boldsymbol{x}_u)_P + \xi^2 (\boldsymbol{x}_v)_P$ 以及 $\varepsilon = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{N} = \pm 1$。如令 $k(A) = \varepsilon \kappa_P$（这是曲线 c 在平面 π_A 内的曲率），则

$$k(\boldsymbol{A}) = H(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}) = \varepsilon \kappa_P \quad \text{或}$$

$$k(\boldsymbol{A}) = \sum_{j,i} H_{ji} \xi^j \xi^i = \varepsilon \kappa_P, \quad (\|\boldsymbol{A}\| = 1)$$

称此 $k(\boldsymbol{A})$ 为曲面 S 在点 P 沿方向 $\boldsymbol{A}$ 的**法曲率**。法曲率 $k(\boldsymbol{A})$ 是在 $T_P(S)$ 的单位圆 S^1 上定义的 C^∞ 函数（其实是 ξ^h 的二次函数）（参照图 2.25）。在点 P，沿切向量 $\boldsymbol{B}$（未必是单位向量）方向的法曲率由

$$k(\boldsymbol{B}) = k\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\|\boldsymbol{B}\|} \right) = \frac{H(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B})}{\|\boldsymbol{B}\|^2}$$

$$= \frac{\sum_{j,i} H_{ji} \xi^j \xi^i}{\sum_{j,i} g_{ji} \xi^j \xi^i} \qquad (10.1)$$

定义（式中设 $\boldsymbol{B} = \xi^1 (\boldsymbol{x}_u)_P + \xi^2 (\boldsymbol{x}_v)_P$）。

例10.1 由例 9.1 可见，对于半径为 a 的球面 S，

$$H_{ji}=\frac{1}{a}g_{ji}$$

所以，在 S 上的任意点，沿任意切向量 $\boldsymbol{B}=\xi^1(\boldsymbol{x}_u)_P+\xi^2(\boldsymbol{x}_v)_P$ 方向的法曲率$k(\boldsymbol{B})$是一定的.

$$k(\boldsymbol{B})=\frac{\sum_{j,i}H_{ji}\xi^j\xi^i}{\sum_{j,i}g_{ji}\xi^j\xi^i}=\frac{1}{a}$$

【问题 10.1】 运用例 9.2，例 9.3，证明下列事实，

(1) 在圆柱面的任意点 P，沿单位切向量 $\boldsymbol{A}$，其法曲率为

$$k(\boldsymbol{A})=\frac{1}{a}(\xi^1)^2,$$

$$(\boldsymbol{A}=\xi^1(\boldsymbol{x}_u)_P+\xi^2(\boldsymbol{x}_v)_P)$$

(2) 在平面的任意点 P，沿任意切向量 $\boldsymbol{A}$，其法曲率总是

$$k(\boldsymbol{A})=0$$

如果固定曲面 S 上的一点 P，对于 P 处的单位切向量 $\boldsymbol{A}$，$k(\boldsymbol{A})$是 $\boldsymbol{A}$ 的函数。我们来求此 $k(\boldsymbol{A})$ 的最大值与最小值。设 $\boldsymbol{A}=\xi^1(\boldsymbol{x}_u)_P+\xi^2(\boldsymbol{x}_v)_P$，本问题归结为$\xi^1$，$\xi^2$ 的函数

$$k(\boldsymbol{A})=L(\xi^1)^2+2M\xi^1\xi^2+N(\xi^2)^2$$

在条件

$$E(\xi^1)^2+2F\xi^1\xi^2+G(\xi^2)^2=1$$

之下求最大值与最小值的问题。故由众所周知的拉格朗日乘数法可见，

$$\begin{vmatrix} L-kE & M-kF \\ M-kF & N-kG \end{vmatrix}=0$$

即

$$\det(H_{ji}-kg_{ji})=0 \tag{10.2}$$

的二根 $k_1\geqslant k_2$ 分别为法曲率 $k(\boldsymbol{A})$的最大值与最小值，方程

$$(L-k_1E)\xi^1+(M-k_1F)\xi^2=0,$$
$$E(\xi^1)^2+2F\xi^1\xi^2+G(\xi^2)^2=1$$

即

$$\sum_i H_{ji}\xi^i = k_1 \sum_i g_{ji}\xi^i,$$
$$\sum_{j,i} g_{ji}\xi^j\xi^i = 1 \tag{10.3}$$

的解(ξ^1, ξ^2)决定单位切向量 $\boldsymbol{A}_1 = \xi^1(\boldsymbol{x}_u)_P + \xi^2(\boldsymbol{x}_v)_P$ 使得沿此方向 $\boldsymbol{A}_1$，法曲率 $k_1 = k(\boldsymbol{A}_1)$取最大值。此外，方程

$$(L - k_2E)\eta^1 + (M - k_2F)\eta^2 = 0,$$
$$E(\eta^1)^2 + 2F\eta^1\eta^2 + G(\eta^2)^2 = 1 \tag{10.4}$$

即

$$\sum_i H_{ji}\eta^i = k_2 \sum_i g_{ji}\eta^i,$$
$$\sum_{j,i} g_{ji}\eta^j\eta^i = 1 \tag{10.5}$$

的解(η^1, η^2)决定单位切向量 $\boldsymbol{A}_2 = \eta^1(\boldsymbol{x}_u)_P + \eta^2(\boldsymbol{x}_v)_P$ 使得沿此方向 $\boldsymbol{A}_2$，法曲率 $k_2 = k(\boldsymbol{A}_2)$取最小值。

这样的 k_1 与 k_2 叫做曲面S在点P的**主曲率**，切向量 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_2$ 所决定的方向叫做曲面S在点P的**主方向**。

定理 2.2 如果在曲面S的点P，主曲率 k_1，k_2 不同，那末主方向正交。

〈**证明**〉 (10.3)的第一式乘以 η^j 并求和，(10.5)的第一式乘以 ξ^j 并求和，然后边边相减，运用 $g_{ji} = g_{ij}$ 与 $H_{ji} = H_{ij}$ 得

$$(k_1 - k_2)\sum_{j,i} g_{ji}\eta^j\xi^i = 0$$

即

$$\sum_{j,i} g_{ji}\eta^j\xi^i = 0$$

(运用了 $k_1 \neq k_2$)。即 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_2$ 正交。 (证毕)

又当 $k_1 \neq k_2$ 时，下式成立。

$$\sum_{j,i} H_{ji}\eta^j\xi^i = 0$$

即

$$H(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2) = 0 \tag{10.6}$$

〈**证明**〉 (10.3)的第一式乘以 η^j 并求和，运用$\sum_{j,i} g_{ji}\eta^j\xi^i = 0$，

则得(10.6)。 (证毕)

定理 2.3 如果在曲面 S 上的点 P 主曲率 k_1, k_2 相等，则 $T_P(S)$ 的所有单位切向量所定方向都是主方向，在点 P 下式成立。

$$\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G} \tag{10.7}$$

〈**证明**〉 因 $k(A)$ $(\|A\|=1)$ 的最大值与最小值一致，故 $k(A)$ $(\|A\|=1)$ 是定值。即 $T_P(S)$ 内的所有单位切向量都是主方向。其次，因对于满足 $E(\xi^1)^2+2F\xi^1\xi^2+G(\xi^2)^2=1$ 的所有 (ξ^1, ξ^2)，

$$k(A)=L(\xi^1)^2+2M\xi^1\xi^2+N(\xi^2)^2$$

是一定的，故比例式(10.7)成立。 (证毕)

比例式(10.7)成立的曲面上的点叫做**脐点**。例如，球面上的所有点都是脐点（参照例 10.1 ）。

例 10.2 如果曲面 S 上的所有点都是脐点，

$$\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}=\frac{1}{a} \quad (a \text{ 为常数})，$$

则 S 是半径为 a 的球面的一部分，若 S 又是完备的话，S 是半径为 a 的球面。试证明之。（即使去掉“a 为常数”这样条件，也能证明上列事实成立。见 § 13 的定理 3.6）。

〈**解答**〉 由(9.1)与(9.2)可见，

$$\frac{\partial N}{\partial u^i}=-\sum_h H_i{}^h x_h$$

然因给定条件是

$$H_{ji}=\frac{1}{a}g_{ji}$$

故

$$H_i{}^h=\sum_k H_{ik}g^{kh}=\frac{1}{a}\sum_k g_{ik}g^{kh}=\frac{1}{a}\delta_i{}^h$$

代入一开始的方程得

$$\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial u^i} = -\frac{1}{a}\boldsymbol{x}_i = -\frac{1}{a}\ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^i},$$

$\therefore$
$$\frac{\partial}{\partial u^i}(\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{N}) = 0$$

$\therefore$ $\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{N} = \boldsymbol{c}$ （$\boldsymbol{c}$ 为常向量）

$\therefore$
$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}\|^2 = a^2$$

此方程说明 S 上的各点在以 $\boldsymbol{c}$ 为位置向量的点为圆心，半径为 a 的球面上。即曲面 S 为此球面的一部分。特别当 S 是完备的，则由例 7.3 知 S 与此球面一致。 （证毕）

定理 2.4 在曲面 S 上取非脐点 P，在 $T_P(S)$ 内取主方向 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$。今取任意向量 $\boldsymbol{A}$ 如图2.26所示，则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1\cos\theta + \boldsymbol{A}_2\sin\theta$. 这时

$$k(\boldsymbol{A}) = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta \qquad (10.8)$$

成立。称之为**欧拉公式**。

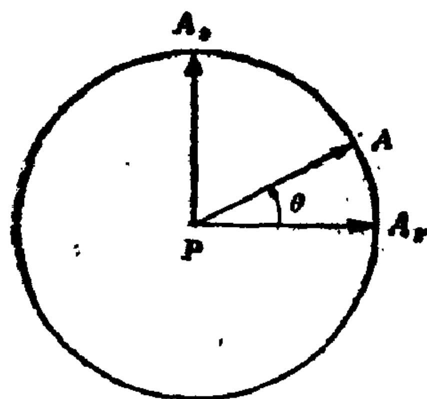


图 2.26

〈**证明**〉 当 $k_1 = k_2$ 时，显然(10.8)成立。设 $k_1 \neq k_2$。

$$k(\boldsymbol{A}) = H(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{A})$$
$$= H(\cos\theta\boldsymbol{A}_1 + \sin\theta\boldsymbol{A}_2,\ \cos\theta\boldsymbol{A}_1 + \sin\theta\boldsymbol{A}_2)$$

运用(10.6)，$H(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_1) = k(\boldsymbol{A}_1) = k_1, H(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_2) = k(\boldsymbol{A}_2) = k_2$，则得(10.8)。 （证毕）

全曲率　平均曲率 改变方程(10.2)的形状得

$$k^2 - \frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2}k + \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0$$

设此方程的二根即主曲率为 k_1，k_2，则由根与系数的关系得

$$k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

$$k_1 + k_2 = \frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2} \qquad (10.9)$$

第一式右边是在(9.20)定义的**全曲率**K，故得

$$K = k_1 k_2 \tag{10.10}$$

其次

$$h = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \tag{10.11}$$

叫做**平均曲率**。又因

$$(g^{ji}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

$$g = EG - F^2$$

故运用(10.9)的第二式，在一个坐标邻域O里得到下列公式。

公式 $$h = \frac{1}{2}\sum_{j,\,i} g^{ji} H_{ji} = \frac{1}{2}\sum_i H_i{}^i \tag{10.12}$$

全曲率K在曲面S上是C^∞函数。然而，在坐标邻域O与$\overline{O}$的平均曲率分别设为h，$\overline{h}$，则在$O \cap \overline{O}$里

$$\overline{h} = \operatorname{sign}\left(\frac{\partial(\overline{u}, \overline{v})}{\partial(u, v)}\right) h \tag{10.13}$$

成立（参照下列[问题 10.2]）。故当曲面S有方向时，平均曲率h能够看做在整个曲面S上定义的C^∞函数(运用给S以方向的图册$\mathscr{B}$)。

【问题 10.2】 运用(9.18)证明(10.13)。

参考(10.13)可得以下事实：不管曲面S是否有向，平均曲率h恒等于0是有意义的。这样曲面（$h=0$的曲面）叫做**极小曲面**。当在空间里给定充分小的简单闭曲线C时，使以C为边界的曲面S，一方面保持C为其边界，同时又微小变形，如其面积总是增大，则人们知道S是极小曲面。人们还知道，用金属丝作简单闭曲线C，以C为边界挂上肥皂膜便得极小曲面。又如$h=0$时，由(10.11)可见$k_1 + k_2 = 0$，故$k_1 k_2 = 0$或$k_1 k_2 < 0$。故在极小曲面的各点，全曲率K满足$K \leqslant 0$。

例 10.3 (1) 对于例 9.1 的球面，下式成立。

$$H_{ij} = \frac{1}{a} g_{ij},$$

$$\therefore \qquad K=\frac{1}{a^2}, \qquad h=\frac{1}{a}$$

(2) 对于例 9.2 的圆柱面，下式成立。

$$(H_{ji})=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \qquad K=0, \quad h=\frac{1}{2a}$$

(3) 由例 9.3 可见，对于平面，$H_{ji}=0$。故对于平面，下式成立。

$$K=0, \qquad h=0$$

【问题 10.3】 在曲面 S 上，如向量场 $\boldsymbol{X}$ 在各点都与主方向平行，试证

$$\partial_X \boldsymbol{N}=-L(\boldsymbol{X})=-k\boldsymbol{X}$$

成立。但 k 为对应于 $\boldsymbol{X}$ 的主曲率。

定理 2.5 在曲面 S 上的点 P， $\boldsymbol{A}=\xi^1(\boldsymbol{x}_u)_P+\xi^2(\boldsymbol{x}_v)_P$ 的方向为主方向的充要条件是

$$\begin{aligned}(EM-LF)(\xi^1)^2+(EN-LG)\xi^1\xi^2 \\ +(FN-MG)(\xi^2)^2=0\end{aligned} \tag{10.14}$$

〈证明〉 此 $\boldsymbol{A}$ 的方向为主方向的充要条件是

$$(L-kE)\xi^1+(M-kF)\xi^2=0$$
$$(M-kF)\xi^1+(N-kG)\xi^2=0$$

成立，即下式成立。

$$(L\xi^1+M\xi^2)-k(E\xi^1+F\xi^2)=0$$
$$(M\xi^1+N\xi^2)-k(F\xi^1+G\xi^2)=0$$

而此方程有非平凡（即非(0,0)的）解（1，$-k$)的充要条件是

$$\begin{vmatrix} L\xi^1+M\xi^2 & E\xi^1+F\xi^2 \\ M\xi^1+N\xi^2 & F\xi^1+G\xi^2 \end{vmatrix}=0$$

展开之，得(10.14)。 （证毕）

当曲面 S 上的曲线在其各点都与主方向相切时，称之为**曲率线**。由定理 2.5 可见，在坐标邻域内，曲率线方程 $u=u(t)$，$v=v(t)$ 的右边为微分方程

$$(EM-LF)\left(\frac{du}{dt}\right)^2+(EN-LG)\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}$$

$$+(FN-MG)\left(\frac{dv}{dt}\right)^2=0 \qquad (10.15)$$

的解。反之，此微分方程的解决定曲率线。根据常微分方程的解的存在与唯一性定理可见，在非脐点的邻域里，(10.15)的解通过各点存在两个，它们就是两条曲率线。同时它们正交（根据定理 2.2）。整理之得下列定理。

定理 2.6 在曲面上如果 P 点不是脐点，那末在 P 的充分小邻域里存在互相正交的二组曲率线。

因此，在非脐点的（充分小）邻域 O 内，存在其 u 曲线与 v 曲线为曲率线的坐标系(u, v)。当点 P 不是脐点时，在 P 的邻域里坐标系(u,v)的坐标曲线为曲率线的充要条件是在 O 内下式成立。

$$F=0,\ M=0 \qquad (10.15)'$$

【问题 10.4】 试证上列(10.15)′.

例 10.4 在闭曲面（紧致的曲面）S 上，必存在全曲率 K 满足 $K(P_0)>0$的点 P_0。试证明之。

〈解答〉 设 S 上的点的位置向量为 $\boldsymbol{x}$，则函数$f(P)=\|\boldsymbol{x}\|^2=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=r^2(r\geqslant 0)$ 在 S 上是 C^∞ 函数。因为 S 紧致，f 连续，所以在 S 上的一点 P_0，f 达到最大。故如 P_0 不是脐点，则由定理 2.6 知，在 P_0 的某坐标邻域内可使坐标曲线全是曲率线。这时由 (10.15)′可见 $F=0$，$M=0$。再说，在点 P_0

$$f_u=2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}_u=0,\ f_v=2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}_v=0$$

因此在 P_0，$\boldsymbol{x}$ 垂直于 S 的切平面。故在 S 的点 P_0，

$$N=\frac{\boldsymbol{x}}{r}$$

为单位法向量（注意在点 P_0，$r>0$）。

其次，因为 f 在 P_0 达到最大。所以在 P_0

$$f_{uu}=2\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_u+2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}_{uu}\leqslant 0,$$
$$f_{vv}=2\boldsymbol{x}_v\cdot\boldsymbol{x}_v+2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}_{vv}\leqslant 0$$

成立。即

$$E+rL\leqslant 0,\qquad G+rN\leqslant 0$$

在点 P_0 成立。于是，在点 P_0 主曲率满足

$$k_1=\frac{L}{E}\leqslant -\frac{1}{r}<0,$$

$$k_2=\frac{N}{G}\leqslant -\frac{1}{r}<0$$

可见，在点 P_0

$$K=k_1k_2>0$$

又如 P_0 为脐点时，$k_1=k_2=\dfrac{L}{E}=\dfrac{N}{G}$成立，故可得与上相同的结论。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（证毕）

《**注意**》 从例 10.4 可见下列事实：不存在到处 $K\leqslant 0$ 的闭曲面。特别是不存在到处$K=0$ 的闭曲面。

高斯映射　设 S 为有方向的曲面。沿 S 能够连续地决定其单位法向量$\boldsymbol{N}$。对于 S 的各点，取 P 处的单位法向量 $\boldsymbol{N}_P$，以 E^3 的原点为起点画 $\boldsymbol{N}_P$,则其终点 P' 在单位球面 S^2 上.根据对应 $f:P\mapsto P'$，决定连续映射 $f:S\to S^2$。此 f 叫做曲面 S 的**高斯映射**或 S 的**球面表示**。关于曲面S，下式成立（参照(9.1)．(9.2)）。

$$\frac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial u}=-H_1{}^1\boldsymbol{x}_u-H_1{}^2\boldsymbol{x}_v,$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial v}=-H_2{}^1\boldsymbol{x}_u-H_2{}^2\boldsymbol{x}_v$$

$$\therefore\qquad \frac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial v}=\det(H_j{}^i)\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial v}$$

然而，根据(9.10)得



图 2.27

$$\det(H_j{}^i)=\det(H_{ji})\det(g^{ji})$$
$$=\frac{\det(H_{ji})}{\det(g_{ji})}=K$$

但于式中运用了 $\det(g^{ji})=1/\det(g_{ji})$。故

$$\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial v}=K\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v} \tag{10.16}$$

考虑曲面 S 的坐标邻域 (U,θ,O)，作 $f\circ\theta: U\to S^2$，则 $f\circ\theta$ 可由方程

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{N}(u,\ v)$$

表示。故在坐标邻域 O 的各点设 $K\neq 0$，则由(10.16)知

$$\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial v}\neq 0$$

因此，$(U',f\circ\theta,f\circ\theta(U'))$为球面 S^2 上的一个坐标邻域（设 U' 为U 的充分小开子域）．故得以下定理．

定理 2.7 如果在曲面 S 的一点 P，全曲率 K 不是 0，取 P 的充分小邻域 O，则在高斯映射 f 下 O 的象 $f(O)$ 是 S^2 的开域．而此开域 $f(O)$ 的面积 A 由

$$A=\iint_O |K|\,d\sigma,$$
$$d\sigma=\sqrt{g}\,dudv$$

决定．式中 $d\sigma$ 为曲面 S 的面积素．

〈**证明**〉 导出求 $f(O)$ 的面积的积分。对于 $f(O)$ 运用(8.9)，则其面积由下式决定。

$$A=\iint_{f(O)}\left\|\frac{\partial N}{\partial u}\times\frac{\partial N}{\partial v}\right\|dudv$$

$$=\iint_O|K|\sqrt{g}\,dudv=\iint_O|K|d\sigma \quad \text{(证毕)}$$

《**注意**》从定理 2.7 可见下列事实：在曲面 S 上取一点 P。取 S 的邻域 O 包含 P，让 O 收缩于点 P 时，对于高斯映射 $f:S\to S^2$

$$\frac{f(O)\text{的面积}}{O\text{的面积}}$$

的极限等于点 P 处曲面 S 的全曲率 K。

习 题 二

1. 将 zx 平面上的正则曲线

$$x=f(t),\quad z=g(t),\quad (a<t<b)$$

绕 z 轴回转一周而得的**回转面**

$$x=f(u)\cos v,\quad y=f(u)\sin v,$$
$$z=g(u),\qquad (a<u<b,\ 0<v<2\pi)$$

当 $f'(t)\neq 0$，$f(t)>0$ 时，定义局部曲面。试证明之。

2. 正则曲线 $C:\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(s)$（$s$ 为弧长）的切线上的点全体所作的集可用

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(u)+v\boldsymbol{y}'(u),\qquad (v\neq 0)$$

表示，称之为曲线 C 的**切线曲面**。试证此方程表示一曲面。但设 C 的曲率到处不是 0。

3. 试证以下事实。但设 $u^1=u$，$u^2=v$。

(1) 回转面：$x=f(u)\cos v$，$y=f(u)\sin v$，$z=g(u)$ 的第一基本量为

$$E=f'^2+g'^2,\quad F=0,\quad G=f^2$$

(2) 正则曲线 $C:\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(s)$（$s$ 是弧长）的切线曲面

$$x = y(u) + v y'(u), \qquad (v \neq 0)$$

第一基本量为

$$E = 1 + v^2\kappa^2, \ F = 1, \ G = 1$$

式中 $\kappa = \kappa(s)$表示曲线 C 的曲率。

4. 当曲面的线素为

$$ds^2 = du^2 + f(u,v)dv^2$$

时，试证以下性质。

(1) u 曲线与 v 曲线正交。

(2) 二 v 曲线从任意的 u 曲线截割等长之弧。

5. 曲面：$x = x(u,v)$，$y = y(u,v)$，$z = z(u,v)$ 的第二基本量由下式决定，试证明之。

$$L = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \partial^2 x/\partial u^2 & \partial^2 y/\partial u^2 & \partial^2 z/\partial u^2 \\ \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \end{vmatrix}$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \partial^2 x/\partial u\partial v & \partial^2 y/\partial u\partial v & \partial^2 z/\partial u\partial v \\ \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \end{vmatrix}$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \partial^2 x/\partial v^2 & \partial^2 y/\partial v^2 & \partial^2 z/\partial v^2 \\ \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \end{vmatrix}$$

但 $g = \det(g_{ji})$。

6. 对于曲面：$x = u$，$y = v$，$z = u^2 - v^2$，试证以下事实。

(1) $$L = 2(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}, M = 0, N = -2(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-\frac{1}{2}},$$

$$LN - M^2 = -4(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-1}$$

(2) 在此曲面上的所有点都是双曲点。

7. 正则曲线C的切线曲面上的所有点（C上的点除外）是抛物点，试证明之.但在这里设C的曲率κ到处不是0(参照上列习题 2)。

8. 设曲面S上的点P是椭圆点。在点P的充分小邻域，曲面S

在点P处的切平面的一侧。试证明之。

9． 在曲面：$x=u+v$，$y=u-v$，$z=uv$ 上的点 $u=1$，$v=1$，

$$K=-\frac{1}{16}, \qquad h=\frac{1}{8\sqrt{2}}$$

试证明之。

10． 试证回转面

$$x=\cosh u\cos v,\ \ y=\cosh u\sin v,\ \ z=u$$

是极小曲面（设h为平均曲率，$h=0$）。

11． 二曲面 S_1 与 S_2 的交线 C 的曲率 κ 满足

$$\kappa^2\sin^2\alpha=k_1^2+k_2^2-2k_1k_2\cos\alpha$$

试证明之。但k_1,k_2分别为曲面 S_1,S_2 沿 C 的法曲率。又α是S_1，S_2 的单位法向量沿C的夹角。

12． 设二曲面 S_1 与 S_2 以定角相交。如果交线 C 是曲面 S_1 的曲率线，则 C 也是曲面 S_2 的曲率线。试证明之。

13． 平面或球面与其他曲面S以定角相交，则其交线为曲面S的曲率线。试证明之（运用习题二之12）。

14． 在曲面上一点，沿互相正交二方向的法曲率之和是一定的。试证明之。

15． 在曲面的坐标邻域内设u曲线与v曲线全是曲率线，对应于它们的主曲率分别设为 k_1 与 k_2 。试证下式。

$$\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial u}=-k_1\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial v}=-k_2\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}$$

16． 设$\boldsymbol{A}$为曲面的一点处的切向量。当关于$\boldsymbol{A}$的方向的法曲率为0时，即 $k(\boldsymbol{A})=0$ 时，称$\boldsymbol{A}$的方向为**渐近方向**。试证以下事实。

（1）设指向渐近方向的切向量$\boldsymbol{A}$的分量为$(\xi^1,\ \xi^2)$，则

$$\sum_{j,i}H_{ji}\xi^j\xi^i=0$$

(2) 在椭圆点没有渐近方向。

(3) 在双曲点有二不同渐近方向。

(4) 在平点，所有的方向都是渐近方向。

17. 在曲面 S 的曲线 C 的各点，其切向量指向渐近方向时，则称 C 为**渐近线**。试证以下性质。

(1) 在双曲点的充分小邻域内，二组坐标曲线全是渐近线的坐标系存在。

(2) 坐标曲线全是渐近线的充要条件是

$$L = N = 0$$

(3) 如果曲面 S 上包含直线，则它是曲面 S 上的渐近线。

18. 设局部曲面 $S: \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u^1, u^2)$ 的单位法向量为 $\boldsymbol{N}(u^1, u^2)$，r 为常数。这时考虑参数表示。

$$S_r: \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u^1, u^2) + r\boldsymbol{N}(u^1, u^2)$$

一般地说，它表示局部曲面 S_r。当 S_r 表示局部曲面时，S_r 叫做曲面 S 的**平行曲面**。试证以下性质。

(1) 当 $r \neq \dfrac{1}{k_1}, \dfrac{1}{k_2}$（$S$ 的主曲率）时，S_r 表示曲面。

(2) 设平行曲面 S_r 的第一、第二基本量分别为 $\overline{g}_{ji}$ 与 $\overline{H}_{ji}$，则

$$\overline{g}_{ji} = g_{ji} - 2rH_{ji} + r^2C_{ji}, \qquad \overline{H}_{ji} = H_{ji} - rC_{ji}$$

但(g_{ji})与(H_{ji})分别为 S 的第一基本量与第二基本量，而

$$C_{ji} = g^{qp}H_{qj}H_{pi}$$

此 C_{ji} 叫做曲面 S 的**第三基本量**。

第三章　曲 面 Ⅱ

§11　曲面的基本公式

在曲面 S 上任取二向量场 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$。在 E^3 内沿 $\boldsymbol{Y}$ 方向求 $\boldsymbol{X}$ 的方向导数得 $\partial_Y \boldsymbol{X}$，它未必与 S 相切。在 S 的各点 P，将 $(\partial_Y \boldsymbol{X})_P$ 向切空间 $T_P(S)$ 上正射影，则得 S 上的向量场。这个向量场用 $\nabla_Y \boldsymbol{X}$ 表示，称之为 $\boldsymbol{X}$ 在 $\boldsymbol{Y}$ 方向上的**共变导函数**。即 $\nabla_Y \boldsymbol{X}$ 是 $\partial_Y \boldsymbol{X}$ 在切平面上的正射影。

对于任意 C^∞ 函数 f 以及任意向量场 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{Z}$，

$$\partial_{fY}\boldsymbol{X} = f\partial_Y \boldsymbol{X},\quad \partial_Y(f\boldsymbol{X}) = f\partial_Y \boldsymbol{X} + (\boldsymbol{Y}f)\boldsymbol{X}$$

成立，故下式成立。

$$\begin{aligned} &\nabla_{fY}\boldsymbol{X} = f\nabla_Y \boldsymbol{X}, \qquad \nabla_Y(f\boldsymbol{X}) = f\nabla_Y \boldsymbol{X} + (\boldsymbol{Y}f)\boldsymbol{X} \\ &\nabla_{Y+Z}\boldsymbol{X} = \nabla_Y \boldsymbol{X} + \nabla_Z \boldsymbol{X},\quad \nabla_Y(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Z}) = \nabla_Y \boldsymbol{X} + \nabla_Y \boldsymbol{Z} \end{aligned} \tag{11.1}$$

其次，因 $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{N} = 0$，故微分两边得

$$(\partial_Y \boldsymbol{X})\cdot\boldsymbol{N} + \boldsymbol{X}\cdot\partial_Y \boldsymbol{N} = 0$$

将(9.1)代入此式，并运用(9.5)得

$$(\partial_Y \boldsymbol{X})\cdot\boldsymbol{N} = H(\boldsymbol{Y},\ \boldsymbol{X})$$

故

$$\partial_Y \boldsymbol{X} = \nabla_Y \boldsymbol{X} + H(\boldsymbol{Y},\ \boldsymbol{X})\boldsymbol{N}$$

整理上述诸事实得

公式

$$\partial_Y \boldsymbol{X} = \nabla_Y \boldsymbol{X} + H(\boldsymbol{Y},\ \boldsymbol{X})\boldsymbol{N} \tag{11.2}$$

$$\partial_Y \boldsymbol{N} = -L(\boldsymbol{Y}) \tag{11.3}$$

它叫做曲面的基本公式。特别是(11.2)叫做**高斯公式**，(11.3)叫做**温加顿公式**。从下列〔问题 11.1〕可见，(11.3)可从(11.2)导出，故曲面的基本公式中，仅仅(11.2)是本质的。

【问题 11.1】　运用 $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{N} = 0$，试从(11.2)导出(11.3)。

关于任意向量场$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{Z}$，下式成立。

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y})=(\partial_Z\boldsymbol{X})\cdot\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{X}\cdot(\partial_Z\boldsymbol{Y})$$

故利用(11.2)知

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y})=(\nabla_Z\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y})+(\boldsymbol{X},\ \nabla_Z\boldsymbol{Y}) \tag{11.4}$$

成立.

在坐标邻域O里，可令

$$\nabla_{\boldsymbol{x}_j}\boldsymbol{x}_i=\sum_h\Gamma_{j\ i}^{\ h}\boldsymbol{x}_h \tag{11.5}$$

式中 $\Gamma_{j\ i}^{\ h}$ 为定义在O内的 C^∞ 函数。其次可得

$$\partial_{\boldsymbol{x}_j}\boldsymbol{x}_i=\frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial u^j\partial u^i}=\frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial u^i\partial u^j}=\partial_{\boldsymbol{x}_i}\boldsymbol{x}_j$$

$$\therefore\quad \nabla_{\boldsymbol{x}_j}\boldsymbol{x}_i=\nabla_{\boldsymbol{x}_i}\boldsymbol{x}_j$$

根据(11.5)，下次成立。

$$\Gamma_{j\ i}^{\ h}=\Gamma_{i\ j}^{\ h} \tag{11.6}$$

再运用(11.4)得

$$\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{x}_j,\ \boldsymbol{x}_i)=(\nabla_{\boldsymbol{x}_k}\boldsymbol{x}_j,\ \boldsymbol{x}_i)+(\boldsymbol{x}_j,\ \nabla_{\boldsymbol{x}_k}\boldsymbol{x}_i)$$

在此式里，运用 $g_{ji}=\boldsymbol{x}_j\cdot\boldsymbol{x}_i$ 与(11.5)，则上式变为

$$\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k}=\sum_h\Gamma_{k\ j}^{\ h}g_{hi}+\sum_h\Gamma_{k\ i}^{\ h}g_{jh} \tag{11.7}$$

将 (11.6) 与 (11.7) 看做关于未知数 $\Gamma_{j\ i}^{\ h}$ 的联立方程，解此方程求 $\Gamma_{j\ i}^{\ h}$。为此，首先在(11.7)里，将下标按 $k\to i\to j\to k$ 的顺序交换两次可得下式

$$\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i}=\sum_h\Gamma_{i\ k}^{\ h}g_{hj}+\sum_h\Gamma_{i\ j}^{\ h}g_{kh} \tag{11.8}$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}=\sum_h\Gamma_{j\ i}^{\ h}g_{hk}+\sum_h\Gamma_{j\ k}^{\ h}g_{ih} \tag{11.9}$$

作(11.8)+(11.9)−(11.7)，运用 $g_{ji}=g_{ij}$ 与 (11.6) 得

$$\sum_h\Gamma_{j\ i}^{\ h}g_{hk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k}\right)$$

此式两边乘以 g^{kl}，并关于k求和得

$$\Gamma_{ji}^{h}=\left\{ {h \atop ji} \right\}$$

但令

$$\left\{ {h \atop ji} \right\}=\frac{1}{2}\sum_{k} g^{hk}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^{j}}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^{i}}-\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^{k}}\right),\ \left\{ {h \atop ji} \right\}=\left\{ {h \atop ij} \right\} \tag{11.10}$$

此$\left\{ {h \atop ji} \right\}$叫做**克氏**(Christoffel)**记号**。故(11.5)又可改写如下.

$$\nabla_{x_j} x_i=\sum_{h}\left\{ {h \atop ji} \right\} x_h \tag{11.11}$$

例 11.1 (1)试证克氏记号可用E，F，G表达如下.

$$\left\{ {1 \atop 11} \right\}=\frac{GE_u-2FF_u+FE_v}{2g},\quad \left\{ {1 \atop 22} \right\}=\frac{2GF_v-GG_v-FG_v}{2g}$$

$$\left\{ {2 \atop 11} \right\}=\frac{2EF_u-EE_v+FE_u}{2g},\quad \left\{ {2 \atop 22} \right\}=\frac{EG_v-2FF_v+FG_u}{2g}$$

$$\left\{ {1 \atop 12} \right\}=\frac{GE_v-FG_u}{2g},\quad \left\{ {2 \atop 12} \right\}=\frac{EG_u-FE_v}{2g}\qquad (g=EG-F^2)$$

(2) 如坐标曲线正交，试证

$$\left\{ {1 \atop 11} \right\}=\frac{GE_u}{2g},\quad \left\{ {1 \atop 12} \right\}=\frac{GE_v}{2g},\quad \left\{ {1 \atop 22} \right\}=-\frac{GG_v}{2g}$$

$$\left\{ {2 \atop 11} \right\}=-\frac{EE_v}{2g},\quad \left\{ {2 \atop 12} \right\}=\frac{EG_u}{2g},\quad \left\{ {2 \atop 22} \right\}=\frac{EG_v}{2g}$$

成立。

〈**解答**〉 (1) 作

$$(g_{ji})=\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

的逆矩阵得

$$(g^{ji})=(g_{ji})^{-1}=\frac{1}{g}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

运用这些(g_{ji})与(g^{ji})，具体地计算由(11.10)定义的$\left\{ {h \atop ji} \right\}$便得所求之式。

(2) 在(1)中所示公式里，令 $F=0$ 即可.(证毕)

在高斯公式(11.2)里，令 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}_i$，$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{x}_j$，则在各坐标邻域$O$内

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial u^j \partial u^i}=\frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial u^j}=\sum_h \left\{ {h \atop ji} \right\} \boldsymbol{x}_h + H_{ji}\boldsymbol{N} \qquad (11.12)$$

成立。有时此式叫做**高斯公式**.

在温加顿公式(11.3)里，令 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{x}_j$，则在各坐标邻域$O$内

$$\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial u^j}=-\sum_h H_j{}^h \boldsymbol{x}_h \qquad (11.13)$$

成立. 有时此式叫做**温加顿公式**.

【问题 11.2】 导出上述(11.12)与(11.13).

在这里，将克氏记号的性质整理之，得

$$\left\{ {h \atop ji} \right\}=\left\{ {h \atop ij} \right\} \qquad (11.14)$$

$$\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k}-\sum_h \left\{ {h \atop kj} \right\} g_{hi}-\sum_h \left\{ {h \atop ki} \right\} g_{jh}=0 \qquad (11.15)$$

$$\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k}=0 \Longleftrightarrow \left\{ {h \atop ji} \right\}=0 \qquad (11.16)$$

【问题 11.3】 运用(11.10)与(11.15)，试证明上列(11.16)。

例 11.2 试证下列公式。

$$\frac{1}{2}\ \frac{\partial \log g}{\partial u^j}=\frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u^j}=\sum_h \left\{ {h \atop jh} \right\},\quad g=\det(g_{ji})$$

〈解答〉 在矩阵(g_{ji})里，对应于元 g_{ji} 的余因式为 g^{ji}/g.故

$$\frac{\partial g}{\partial u^j}=\frac{\partial}{\partial u^j}\det(g_{ji})=g\sum_{h,i}\frac{\partial g_{hi}}{\partial u^j}g^{hi}$$

然而从(11.10)得

$$\sum_h \left\{ {h \atop jh} \right\}=\frac{1}{2}\sum_{h,i}\left(\frac{\partial g_{hi}}{\partial u^j}\right)g^{hi}$$

由此二式可得下式。

$$\sum_h \left\{ {h \atop jh} \right\} = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial u^j} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log g}{\partial u^j} = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u^j} \qquad \text{(证毕)}$$

【问题 11.4】 关于平面上的仿射坐标系，试证 $\left\{ {h \atop ji} \right\} = 0$。

【问题 11.5】 运用$\sum_h g_{jh} g^{hi} = \delta_j^i$ 与(11.15)，试证下式。

$$\frac{\partial g^{ji}}{\partial u^k} + \sum_h \left\{ {j \atop kh} \right\} g^{hi} + \sum_h \left\{ {i \atop kh} \right\} g^{jh} = 0 \qquad (11.17)$$

共变微分 在坐标领域 O 里，设向量场 X 与 Y 的局部表示分别为$X = \sum_i X^i x_i$ 与 $Y = \sum_i Y^i x_i$，运用(11.1)与(11.11)得 $\nabla_Y X$ 的局部表示

$$\nabla_Y X = \sum_h \left(\sum_j Y^j \nabla_j X^h \right) x_h \qquad (11.18)$$

式中令

$$\nabla_j X^h = \frac{\partial X^h}{\partial u^j} + \sum_i \left\{ {h \atop ji} \right\} X^i \qquad (11.19)$$

括弧积 运用〔问题 7.7〕的结果并注意(11.14)得

公式 $\qquad [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \qquad (11.20)$

平行向量场 对于任意向量场Y，

$$\nabla_Y X = 0$$

成立时，则X叫做**平行向量场**。

X为平行向量场的充要条件是

$$\nabla_j X^h = 0$$

成立，或对于任意向量场Y，

$$\partial_Y X = H(Y, X) N$$

成立。

坐标变换 设在曲面 S 上的两个坐标邻域O与$\overline{O}$的局部坐标分别为(u^1, u^2)与$(\overline{u}^1, \overline{u}^2)$。下列公式成立。

公式 在$O \cap \overline{O}$里

$$\left\{\overline{\begin{matrix}h\\ji\end{matrix}}\right\}=\sum_p\frac{\partial\bar u^h}{\partial u^p}\left(\sum_{q,r}\left\{\begin{matrix}p\\rq\end{matrix}\right\}\frac{\partial u^r}{\partial\bar u^j}\ \frac{\partial u^q}{\partial\bar u^i}+\frac{\partial^2u^p}{\partial\bar u^j\partial\bar u^i}\right)\tag{11.21}$$

但设$\left\{\begin{matrix}h\\ji\end{matrix}\right\}$与$\left\{\overline{\begin{matrix}h\\ji\end{matrix}}\right\}$分别为$O$与$\overline{O}$里的克氏记号。此式称为**克氏记号的变换式**。

〈**证明**〉 设S在O与$\overline{O}$里的局部表示分别为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u^1,\ u^2),\ \ \boldsymbol{x}=\overline{\boldsymbol{x}}(\bar u^1,\ \bar u^2)$$

令 $\boldsymbol{x}_i=\partial\boldsymbol{x}/\partial u^i$，$\overline{\boldsymbol{x}}_i=\partial\overline{\boldsymbol{x}}/\partial\bar u^i$，则在 $O\cap\overline{O}$里

$$\overline{\boldsymbol{x}}_i=\sum_p\frac{\partial u^p}{\partial\bar u^i}\boldsymbol{x}_p\tag{11.22}$$

如果用（11.11），则在$O\cap\overline{O}$里得

$$\nabla_{\boldsymbol{x}_j}\boldsymbol{x}_i=\sum_h\left\{\begin{matrix}h\\ji\end{matrix}\right\}\boldsymbol{x}_h,\ \ (\nabla_{\overline{\boldsymbol{x}}_j}\overline{\boldsymbol{x}}_i)=\sum_h\left\{\overline{\begin{matrix}h\\ji\end{matrix}}\right\}\overline{\boldsymbol{x}}_h$$

将(11.22)代入上列第二式，再用(11.1)得

$$\sum_h\frac{\partial u^p}{\partial\bar u^h}\left\{\overline{\begin{matrix}h\\ji\end{matrix}}\right\}=\sum_{q,r}\frac{\partial u^r}{\partial\bar u^j}\ \frac{\partial u^q}{\partial\bar u^i}\left\{\begin{matrix}p\\rq\end{matrix}\right\}+\frac{\partial^2u^p}{\partial\bar u^j\partial\bar u^i}$$

两边乘 $\partial\bar u^h/\partial u^p$，关于$p$求和便得(11.21)。（证毕）

设向量场$\boldsymbol{X}$在O与$\overline{O}$的局部表示分别为 $\boldsymbol{X}=\sum_iX^i\boldsymbol{x}_i$ 与 $\boldsymbol{X}=\sum_i\overline{X}^i\overline{\boldsymbol{x}}_i$，由(7.16)可见，在 $O\cap\overline{O}$内分量的变换式

$$\overline{X}^i=\sum_p\frac{\partial\bar u^i}{\partial u^p}X^p\tag{11.23}$$

成立．运用(11.21)与(11.23)可证明下列公式：

在$O\cap\overline{O}$里下列变换式成立。

公式

$$\nabla_j\overline{X}^i=\sum_{p,q}\frac{\partial u^q}{\partial\bar u^j}\ \frac{\partial\bar u^i}{\partial u^p}\nabla_qX^p\tag{11.24}$$

但 ∇_jX^i 与 $\nabla_j\overline{X}^i$ 分别为在O与$\overline{O}$里由(11.19)定义的式子。

【**问题**11.6】 试证上述(11.24)。

§12 曲面上的曲线 测地线

考虑曲面S上的正则曲线 c。在S的坐标邻域O内设c的局部表示为 $u=u(s)$, $v=v(s)$ （s为弧长），曲面S的局部表示为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$ ，则c在E^3内的方程为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u(s), \ v(s))$$

（今后将右边略记为 $\boldsymbol{x}(s)$）．将上式两边微分两次得

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{ds^2}=\sum_h \frac{d^2u^h}{ds^2}\boldsymbol{x}_h+\sum_{j,i}\frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial u^j\partial u^i}\ \frac{du^j}{ds}\ \frac{du^i}{ds}$$

将(11.12)代入此式，则曲线c的曲率向量为

$$\boldsymbol{k}=\frac{d^2\boldsymbol{x}}{ds^2}=\sum_h \frac{\delta^2u^h}{ds^2}\boldsymbol{x}_h+\Big(\sum_{j,i}H_{ji}\frac{du^j}{ds}\ \frac{du^i}{ds}\Big)\boldsymbol{N} \qquad (12.1)$$

式中令

$$\frac{\delta^2u^h}{ds^2}=\frac{d^2u^h}{ds^2}+\sum_{j,i}\left\{ {h \atop ji} \right\}\frac{du^j}{ds}\ \frac{du^i}{ds} \qquad (12.2)$$

测地曲率 法曲率 向曲线c上的点P处的切平面π_p,将c正射影之得曲线 c^*，设 c^* 在点 P 的曲率向量为 $\boldsymbol{k}^*$. 其次，设在P处c的单位切向量为$\boldsymbol{T}$，在点P令 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{T}$，则可写做

$$\boldsymbol{k}^*=k_g\boldsymbol{U}, \quad k_g=\boldsymbol{k}^*\cdot\boldsymbol{U}$$

此 k_g 叫做曲线c在点P的**测地曲率**（k_g为平面曲线 c^* 的曲率）。$\boldsymbol{k}^*$ 叫做c的**测地曲率向量**。我们来求 $\boldsymbol{k}^*$.

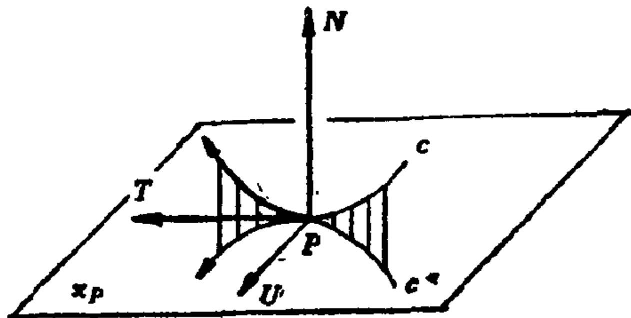


图 3.1

曲线 c^* 的方程可表示为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(s), \quad \boldsymbol{x}^*(s)=(\boldsymbol{x}(s)\cdot\boldsymbol{T})\boldsymbol{T}+(\boldsymbol{x}(s)\cdot\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}$$

（以点P为原点）．故对s微分之得

$$\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}=\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\cdot\boldsymbol{T}\right)\boldsymbol{T}+\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\cdot\boldsymbol{U}\right)\boldsymbol{U}$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}^*}{ds^2}=\left(\frac{d^2\boldsymbol{x}}{ds^2}\cdot\boldsymbol{T}\right)\boldsymbol{T}+\left(\frac{d^2\boldsymbol{x}}{ds^2}\cdot\boldsymbol{U}\right)\boldsymbol{U}$$

然而，在点 P，$\boldsymbol{T}=d\boldsymbol{x}/ds$. 因此，在点 P 运用 c 的曲率向量 $\boldsymbol{k}=d^2\boldsymbol{x}/ds^2$，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{T}=0$，就得

$$\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}=\boldsymbol{T},\quad \left\|\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\right\|=1,\quad \frac{d^2\boldsymbol{x}^*}{ds^2}=(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U})\boldsymbol{U} \tag{12.3}$$

曲线 c^* 的弧长用 s^* 表示，则

$$\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds^*}=\frac{d\boldsymbol{x}^*/ds}{\|d\boldsymbol{x}^*/ds\|},$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}^*}{ds^{*2}}=\frac{\left(\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\right)\frac{d^2\boldsymbol{x}^*}{ds^2}-\left(\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{x}^*}{ds^2}\right)\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}}{\left\|\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds}\right\|^2}$$

运用此式，(12.3)以及 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{T}=0$ 可得在点 P

$$\boldsymbol{k}^*=(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U})\boldsymbol{U} \tag{12.4}$$

于此式中运用(12.1)可见，在点 P

$$\boldsymbol{k}^*=k_g\boldsymbol{U}=\sum_h\frac{\delta^2u^h}{ds^2}\boldsymbol{x}_h \tag{12.5}$$

将

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{T}=\left[\frac{\boldsymbol{x}_1\times\boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_1\times\boldsymbol{x}_2\|}\times\left(\sum_i\frac{du^i}{ds}\boldsymbol{x}_i\right)\right]_P$$

代入 $k_g=\boldsymbol{k}^*\cdot\boldsymbol{U}$ 中，并运用(12.5)可见，在点 P

$$\begin{aligned}k_g&=\sum_h\frac{\delta^2u^h}{ds^2}\boldsymbol{x}_h\cdot\boldsymbol{U}\\&=\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{h,i}\frac{du^i}{ds}\frac{\delta^2u^h}{ds^2}[\boldsymbol{x}_h\ \ \boldsymbol{x}_1\times\boldsymbol{x}_2\ \ \boldsymbol{x}_i]\\&=\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{h,i}\frac{du^i}{ds}\frac{\delta^2u^h}{ds^2}(\boldsymbol{x}_i\times\boldsymbol{x}_h)\cdot(\boldsymbol{x}_1\times\boldsymbol{x}_2)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} du^1/ds & \delta^2 u^1/ds^2 \\ du^2/ds & \delta^2 u^2/ds^2 \end{vmatrix} g$$

整理一下得下列公式。

公式

$$k_g = \sqrt{g} \begin{vmatrix} \dfrac{du^1}{ds} & \dfrac{\delta^2 u^1}{ds^2} \\ \dfrac{du^2}{ds} & \dfrac{\delta^2 u^2}{ds^2} \end{vmatrix} \tag{12.6}$$

这是计算测地曲率 k_g 的公式。测地曲率 k_g 的符号决定于曲面的方向（N 的方向）与曲线 c 的方向（$t = dx/ds$ 的方向）。

运用(12.1)与(12.4)可见，c 的(在 E^3 里的)曲率向量可表示为

$$k = k_g U + H(c', c')N \tag{12.7}$$

式中 c' 为曲线 c 的单位切向量。$H(c', c')$叫做曲线 c 的**法曲率**。

【问题 12.1】 设 u 曲线与 v 曲线的测地曲率分别为 k_1 与 k_2，试证下式.(注意 沿 u 曲线 $du/ds = 1/\sqrt{E}$，$dv/ds = 0$（s 为弧长).)

$$k_1 = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\} \frac{\sqrt{EG - F^2}}{E\sqrt{E}}, \quad k_2 = -\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} \frac{\sqrt{EG - F^2}}{G\sqrt{G}}$$

【问题 12.2】 在上述〔问题 12.1〕里设坐标曲线正交，试证下式（运用例 11.1）.

$$k_1 = -\frac{\partial E}{\partial v} \Big/ 2E\sqrt{G}, \quad k_2 = \frac{\partial G}{\partial u} \Big/ 2G\sqrt{E}$$

测地线 当曲面上的正则曲线的测地曲率 k_g 在其各点为 0 时，这条曲线叫做**测地线**。从(12.7)得下列定理。

定理 3.1 曲面上的曲线为测地线的充要条件是：它是直线或其主法向量在各点垂直于曲面。

又从(12.5)可得下列定理。

定理 3.2 曲面上的曲线为测地线的充要条件是：其局部表示 $u = u(s)$，$v = v(s)$（s 为弧长）为二阶常微分方程

$$\frac{\delta^2 u^h}{ds^2}=\frac{d^2 u^h}{ds^2}+\sum_{j,i}\left\{\begin{matrix}h\\ji\end{matrix}\right\}\frac{du^j}{ds}\ \frac{du^i}{ds}=0 \quad (12.8)$$

的解。

微分方程(12.8)叫做**测地线的微分方程**。

【问题 12.3】 如果直线包含于曲面内，试证它是测地线（运用(12.1)）。

【问题 12.4】 当曲线 c 的局部表示满足(12.8)时，试证

$$\|c'\|^2=\sum_{j,i}g_{ji}\frac{du^j}{ds}\ \frac{du^i}{ds}$$

一定（运用（11.15））。

由上述〔问题 12.4〕可见，当微分方程(12.8)的解 $u^h=u^h(s)$ 在一点 P 满足

$$\|c'\|_P^2=\left(\sum_{j,i}g_{ji}\ \frac{du^j}{ds}\ \frac{du^i}{ds}\right)_P=1$$

时，则局部表示为 $u^h=u^h(s)$ 的曲线 c 以参数 s 为其弧长，且此曲线 c 为测地线。

任取坐标邻域 O 内一点 $P_0(u_0,v_0)$，$(u_0^1=u_0,u_0^2=v_0)$，如果在点 P_0 任意取单位切向量 $A=\Sigma_h A^h(x_h)_{P_0}$ $(\Sigma_{j,i}g_{ji}A^jA^i=1)$，则微分方程(12.8)在初始条件

$$u^h(0)=u_0^h,\qquad \frac{du^h(0)}{ds}=A^h$$

下的解 $u^h=u^h(s)$ 存在，而且是唯一的。故得下列定理。

定理 3.3 关于曲面上的任意点 P，在包含 P 的充分小邻域内，存在而且只有一条测地线通过点 P 而且具有任意给定的方向。又在曲面上取充分接近两点 P，Q，则连结 P 与 Q 的测地线只存在一条。

例 12.1 试证以下事实。

（1） 在平面上，测地线只能是直线或其一部分。

（2） 在球面上，测地线只能是大圆或其一部分。

（3） 在柱面上，测地线只能是和母线以定角相交的曲线。

〈解答〉（1） 对平面上的曲线 c，$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}^*$。故对于 c 来说，$k_g=0$ 与 $\boldsymbol{k}=0$ 等价。这只能在 c 为直线或其一部分的情况下才能发生。

（2） 球面 S^2 上的大圆 c 是通过 S^2 的中心的平面 π 与 S^2 的交线，在 π 上为一圆。故 c 的 $\boldsymbol{k}$ 在 π 上而且在各点与 c 垂直，因此 $\boldsymbol{k}$ 在 c 的各点与 S^2 垂直。从而 c 为 S^2 的测地线。即 S^2 上的任意大圆是测地线。然而，通过 S^2 上任意的点 P，指向 P 处任意方向的大圆存在。故由定理 3.3可知，S^2 的测地线只能是大圆。

（3） 设柱面 S 的母线与一定的单位向量 $\boldsymbol{a}$ 平行. S 上的曲线 c，只有当 $\boldsymbol{k}=(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{N})\boldsymbol{N}$ 时，才是测地线. 又 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{N}=0$，故只有当 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a}=0$时，$c$ 是测地线。条件 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a}=0$ 与 $\boldsymbol{t}'\cdot\boldsymbol{a}=0$等价。积分之可见，这又与 $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{a}=$常数等价。 （证毕）

【问题 12.5】 （1） 设任选测地线的参数为 t，则测地线的方程(12.8) 变为

$$\frac{\delta^2 u^h}{dt^2}=\frac{d^2u^h}{dt^2}+\sum_{j,i}\left\{\begin{matrix}h\\ ji\end{matrix}\right\}\frac{du^j}{dt}\frac{du^i}{dt}=\alpha(t)\frac{du^h}{dt} \qquad (12.9)$$

试证明之。但 $\alpha(t)$为C^∞ 函数。

（2） 在(12.9)中只有 $t=as+b$(s 为弧长，a 与 b 为常数)时，$\alpha(t)=0$，试证明之. 这样的参数 $t=as+b$ 叫做测地线的**仿射参数**.

§13 曲面的结构方程

求和的简略写法 以下谈谈如何简化式子的表示法。首先考虑下列之和。

$$\sum_i a_{ji}{}^i=a_{j1}{}^1+a_{j2}{}^2,\quad \sum_j a_{ji}{}^h b^i=a_{j1}{}^h b^1+a_{j2}{}^h b^2$$

式中左边的单项式$a_{ji}{}^i$，$a_{ji}{}^h b^i$ 里，相同的指标 i 上下各出现一次。在这种情况下有一种习惯，即在上列和中省略去求和符号 Σ_i，分别记做

$$a_{ji}{}^i=\sum_i a_{ji}{}^i,\quad a_{ji}{}^h b^i=\sum_i a_{ji}{}^h b^i$$

这时求和之用的指标 i 怎样更换都行。例如

$$a_{ji}{}^{h}b^{i}=a_{jp}{}^{h}b^{p}=a_{jr}{}^{h}b^{r}$$

不能用于求和的指标叫做**自由指标**。还有，求偏导数的微分算子略记为

$$\partial_i=\frac{\partial}{\partial u^i}$$

规定式中出现的指标 i 总是写在下方。今后，就使用上述关于求和的简略写法。

回忆高斯公式（11.12）与温加顿公式（11.13），曲面 S 在坐标邻域 O 的局部表示 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u^1,\ u^2)$ 满足下列联立偏微分方程：

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_j}=\boldsymbol{x}_j \tag{13.1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}_i}{\partial u_j}=\left\{{h \atop ji}\right\}\boldsymbol{x}_h+H_{ji}\boldsymbol{N} \tag{13.2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial u^j}=-H_j{}^h\boldsymbol{x}_h \tag{13.3}$$

(13.2)的两边对 u^k 偏微分之，运用（13.2)与(13.3）可得

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{x}_i}{\partial u^k\partial u^j}=\left(\partial_k\left\{{h \atop ji}\right\}+\left\{{h \atop kp}\right\}\left\{{p \atop ji}\right\}-H_k{}^hH_{ji}\right)\boldsymbol{x}_h+\left(\partial_kH_{ji}+\left\{{p \atop ji}\right\}H_{kp}\right)\boldsymbol{N} \tag{13.4}$$

然因

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{x}_i}{\partial u^k\partial u^j}=\frac{\partial^2\boldsymbol{x}_i}{\partial u^j\partial u^k}$$

将（13.4）代入上式得

$$\{R_{kji}{}^h-(H_k{}^hH_{ji}-H_j{}^hH_{ki})\}\boldsymbol{x}_h+\left\{\left(\partial_kH_{ji}-\left\{{p \atop ki}\right\}H_{jp}\right)-\left(\partial_jH_{ki}-\left\{{p \atop ji}\right\}H_{kp}\right)\right\}\boldsymbol{N}=0$$

故得

$$R_{kji}{}^{h}=H_{k}{}^{h}H_{ji}-H_{j}{}^{h}H_{ki} \tag{13.5}$$

$$\nabla_{k}H_{ji}-\nabla_{j}H_{ki}=0 \tag{13.6}$$

式中令

$$R_{kji}{}^{h}=\partial_{k}\left\{ {h \atop ji} \right\}-\partial_{j}\left\{ {h \atop ki} \right\}+\left\{ {h \atop kp} \right\}\left\{ {p \atop ji} \right\}-\left\{ {h \atop jp} \right\}\left\{ {p \atop ki} \right\} \tag{13.7}$$

$$\nabla_{k}H_{ji}=\partial_{k}H_{ji}-\left\{ {p \atop kj} \right\}H_{pi}-\left\{ {p \atop ki} \right\}H_{jp} \tag{13.8}$$

(13.5) 与 (13.6) 叫做曲面 S 的**结构方程**，特别是 (13.5) 叫做**高斯方程**， (13.6) 叫做**柯达齐 (Codazzi) 方程。**

(13.3) 的两边对 u^{k} 偏微分之，运用 (13.2) 可得

$$\frac{\partial^{2}\boldsymbol{N}}{\partial u^{k}\partial u^{j}}=-\left(\partial_{k}H_{j}{}^{h}+\left\{ {h \atop kp} \right\}H_{j}{}^{p}\right)\boldsymbol{x}_{h}-H_{kp}H_{j}{}^{p}\boldsymbol{N} \tag{13.9}$$

然而

$$\frac{\partial^{2}\boldsymbol{N}}{\partial u^{k}\partial u^{j}}=\frac{\partial^{2}\boldsymbol{N}}{\partial u^{j}\partial u^{k}}$$

将 (13.9) 代入之可得下式：

$$\nabla_{k}H_{j}{}^{h}-\nabla_{j}H_{k}{}^{h}=0 \tag{13.10}$$

式中令

$$\nabla_{k}H_{j}{}^{h}=\partial_{k}H_{j}{}^{h}-\left\{ {p \atop kj} \right\}H_{p}{}^{h}+\left\{ {p \atop ki} \right\}H_{p}{}^{h}$$

并且运用了由 $H_{ji}=H_{ij}$ 而得的 $H_{kp}H_{j}{}^{p}=H_{jp}H_{k}{}^{p}$. 上面出现的 $R_{kji}{}^{h}$ 叫做曲面 (在坐标邻域 O 里) 的**曲率张量的分量.** 又 $\nabla_{k}H_{ji}$ 叫做第二基本张量 H_{ji} 的**共变导数**. 此外，下列恒等式成立.

$$\nabla_{k}H_{ji}=g_{ih}(\nabla_{k}H_{j}{}^{h}) \tag{13.11}$$

〈**证明**〉 因为 $H_{ji}=g_{ih}H_{j}{}^{h}$，所以

$$\nabla_{k}H_{ji}=\partial_{k}(g_{ih}H_{j}{}^{h})-\left\{ {p \atop kj} \right\}(g_{ih}H_{p}{}^{h})-\left\{ {p \atop ki} \right\}(g_{ph}H_{j}{}^{h})$$

运用 (11.15) 得

$$\partial_{k}(g_{ih}H_{j}{}^{h})=g_{ih}(\partial_{k}H_{j}{}^{h})+(\partial_{k}g_{ih})H_{j}{}^{h}$$

$$= g_{ih}(\partial_k H_j{}^h) + \left(\left\{ {p \atop ki} \right\} g_{ph} + \left\{ {p \atop kh} \right\} g_{ip}\right) H_j{}^h$$

再代入上式得

$$\nabla_k H_{ji} = g_{ih}\left(\partial_k H_j{}^h + \left\{ {h \atop kp} \right\} H_j{}^p - \left\{ {p \atop kj} \right\} H_p{}^h \right)$$

$$= g_{ih}(\nabla_k H_j{}^h) \qquad \text{（证毕）}$$

因为恒等式（13.11）成立，所以（13.10)与柯达齐方程(13.6)等价，故得下列定理。

定理 3.4 在曲面的各坐标邻域里，高斯方程（13.5）与柯达齐方程（13.6）成立.

再用曲率张量的分量（13.7），令

$$R_{kjih} = R_{kji}{}^p g_{ph} \tag{13.12}$$

它叫做**曲率张量的共变分量**. 高斯方程（13.5）与

$$R_{kjih} = H_{kh} H_{ji} - H_{ih} H_{ki} \tag{13.13}$$

等价，也叫做**高斯方程**. 运用恒等式 $H_{ji} = H_{ij}$ 可见 R_{kjih} 具有下列性质：

$$R_{kjih} = -R_{jkih}, \quad R_{kjih} = -R_{kjhi}, \quad R_{kjih} = R_{ihkj} \tag{13.14}$$

因此，在 R_{kjih} 之中

$$R_{1212} = -R_{2112} = -R_{1221} = R_{2121} \tag{13.15}$$

其他全是0。然因

$$R_{1212} = H_{12}H_{21} - H_{22}H_{11} = -\det(H_{ji})$$

故设曲面的全曲率为K时，由（9.20）知

$$K = \frac{\det(H_{ji})}{g}, \quad g = \det(g_{ji})$$

在各坐标邻域内下式成立。

$$K = -\frac{R_{1212}}{g} \tag{13.16}$$

整理之得下列定理。

定理 3.5 （**高斯**）在各坐标邻域里，曲面的全曲率K可表示为

$$K=-\frac{R_{1212}}{g}$$

从而，全曲率K在各坐标邻域里可用其第一基本量 g_{ji} 以及其偏导函数 $\partial_k g_{ji}$，$\partial_l\partial_k g_{ji}$ 的确定（与个别曲面无关的）有理式表示。

例 13.1 在曲面的坐标邻域内，如果坐标曲线互相正交，试证下式成立。

$$K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right] \tag{13.17}$$

〈**解答**〉 最后要用 $g=EG$。运用例 11.1 的（1），则

$$R_{1212}=R_{121}{}^2G=\left(\partial_1\left\{\begin{matrix}2\\21\end{matrix}\right\}-\partial_2\left\{\begin{matrix}2\\11\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}2\\1p\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}p\\21\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}2\\2p\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}p\\11\end{matrix}\right\}\right)G$$

$$=\frac{1}{EG}\left\{\frac{1}{2}EG(E_{vv}+G_{uu})-\frac{1}{4}EE_vG_v-\frac{1}{4}E_uGG_u-\frac{1}{4}E_vE_vG-\frac{1}{4}EG_uG_u\right\}$$

$$=\sqrt{EG}\left\{\frac{E_{vv}+G_{uu}}{2\sqrt{EG}}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\right)_vE_v-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\right)_uG_u\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{EG}\left\{\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u+\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v\right\}$$

$$=\sqrt{EG}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\}$$

$$\therefore\quad K=-\frac{1}{EG}R_{1212}=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\}$$

（证毕）

以下运用结构方程证明几个定理。

定理 3.6 只由脐点而成的曲面S是球面的一部分．特别当此曲

面 S 是完备的，则 S 为球面。

〈证明〉 由假设

$$H_{ji}=ag_{ji}$$

式中 a 为 C^∞ 函数．将此式代入柯达齐方程（13.6）得

$$(\partial_k a)g_{ji}-(\partial_j a)g_{ki}+a(\nabla_k g_{ji}-\nabla_j g_{ki})=0$$

式中令

$$\nabla_k g_{ji}=\partial_k g_{ji}-\left\{\begin{matrix}p\\kj\end{matrix}\right\}g_{pi}-\left\{\begin{matrix}p\\ki\end{matrix}\right\}g_{jp}$$

然由（11.15）知 $\qquad \nabla_k g_{ji}=0$

$$\therefore\quad (\partial_k a)g_{ji}-(\partial_j a)g_{ki}=0$$

此式两边乘以 g^{ji}，关于指标 i 与 j 求和则得

$$2(\partial_k a)-(\partial_k a)=0 \qquad \therefore\quad \partial_k a=0$$

（其中使用了 $g_{ji}g^{ji}=\delta_i^i=2$）．于是 a 为常数。故由例 10.2 可见此定理成立。 （证毕）

例 13.2 只由平点（$H_{ji}=0$ 的点）而成的曲面 S 为平面的一部分。若此平面 S 是完备的，则 S 是平面。试证明之．

〈解答〉 由假设 $H_{ji}=0$，故 $H_i{}^h=0$。因此，从温加顿公式（11.13）得

$$\frac{\partial N}{\partial u^i}=0 \quad 即 \quad N=一定$$

又因 $N\cdot x_u=0$，$N\cdot x_v=0$，故存在某常数 c 使得 $N\cdot x=c$。
此式说明曲面 S 是平面的一部分。特别当 S 是完备的，则 S 是平面。

（证毕）

定理 3.7 如果全曲率 K 为正常数的曲面 S 的某邻域 D 内无脐点，则在 D 内主曲率 k_1 与 k_2 不能达到最大值也不能达到最小值。

〈证明〉 设 $\rho_1=1/k_1,\rho_2=1/k_2$，根据对全曲率的假设得

$$K=\frac{1}{\rho_1\rho_2}=常数>0$$

又因在D内无脐点，故在D内可设

$$\frac{1}{\rho_1}>\frac{1}{\rho_2}$$

如设在D内的点P，$1/\rho_1$ 达到最大值，则在P，$1/\rho_2$ 达到最小值．故在点P

$$\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{1}{\rho_1}\right)=0,\quad \frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{1}{\rho_2}\right)=0 \qquad (13.18)$$

同时成立．

因为在D内不存在脐点，所以在P的坐标邻域O内可使坐标曲线为曲率线．此时，参照习题二之 15(p.75) 可得

$$H_{11}=\frac{g_{11}}{\rho_1},\quad H_{12}=H_{21}=0,\quad H_{22}=\frac{g_{22}}{\rho_2},\quad g_{12}=g_{21}=0$$

又在柯达齐方程 (13.6) 里，令 $k=2$，$j=i=1$，再将上列关系式代入之，并运用例 11.1 得

$$\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{g_{11}}{\rho_1}\right)-\begin{Bmatrix}1\\21\end{Bmatrix}\frac{g_{11}}{\rho_1}+\begin{Bmatrix}2\\11\end{Bmatrix}\frac{g_{22}}{\rho_2}$$

$$=\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{1}{\rho_1}\right)g_{11}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}=0$$

$$\therefore\quad \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{1}{\rho_1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\partial\log g_{11}}{\partial u^2}=0 \quad (13.19)$$

同理

$$\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{1}{\rho_2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}\right)\frac{\partial\log g_{22}}{\partial u^1}=0 \quad (13.20)$$

因为 $1/\rho_1\neq1/\rho_2$，注意 (13.18)，从 (13.19) 与 (13.20) 可见：在点P

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}=\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}=0 \qquad (13.21)$$

再将 (13.19) 与 (13.20) 的两边偏微分之，在点 P 考虑，并运用 (13.18) 与 (13.21)，则在点P有

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^2}\left(\frac{1}{\rho_1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2}=0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^1}\left(\frac{1}{\rho_2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}\right)\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1}=0$$

上二式边边相减可见，在点P

$$\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^2}\left(\frac{1}{\rho_1}\right)-\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^1}\left(\frac{1}{\rho_2}\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)\frac{1}{2g_{11}g_{22}}\left(\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2}+\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1}\right)$$

在点P考虑（13.17）得

$$K=-\frac{1}{2g_{11}g_{22}}\left(\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2}+\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1}\right)$$

故由上列二式得下式在点P成立.

$$\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^2}\left(\frac{1}{\rho_1}\right)-\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^1}\left(\frac{1}{\rho_2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)K \tag{13.22}$$

因为在点P，$1/\rho_1$ 达到最大值，$1/\rho_2$ 达到最小值，所以在点P

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^2}\left(\frac{1}{\rho_1}\right)\leqslant 0,\quad \frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^1}\left(\frac{1}{\rho_2}\right)\geqslant 0$$

因由假设知 $1/\rho_1>1/\rho_2$，$K>0$，故在点P成立的等式(13.22)里，其左边$\leqq 0$，右边>0，这不合理。因此在点P，$1/k_1$ 达到最大值这一假设不成立。故定理得证。

定理 3.8 全曲率K为常数的闭曲面，只能是球面。

〈证明〉 设在闭曲面S上K为常数，则由例 10.4知$K>0$.只要证出S上的所有点都是脐点，由定理 3.6 可得S为球面。

考虑 $f=(k_1-k_2)^2$，不论S有无方向，f 在S上是连续函数。今设在S上存在非脐点，根据定理 3.7 知f在S上不是常数.因S是紧致的，故在S上存在f取最大值的点P。在点P处 $f>0$，因此在点

P 的充分小邻域 D 内， $f>0$。又因 $K=k_1k_2>0$，可见 k_1 与 k_2 同号.故在 D 内可设 $k_1>k_2>0$。在 D 内 $k_1-k_2>0$，因 $f=(k_1-k_2)^2$ 在 P 取最大值，所以 k_1-k_2 在 P 达到最大。然因 $K=k_1k_2=$ 常数 >0，故在 P 点 k_1 达到最大，k_2 达到最小.由定理 3.7 可见，在 D 内必须 $K\leqq0$.这与 $K>0$ 矛盾.因此假设在此曲面上存在非脐点不成立.（证毕）

§14 崩 尼 定 理

首先叙述偏微分方程论的如下定理 3.9 与定理 3.10，但证明从略。考虑由自变数为 (u^1,u^2) 的 m 个未知函数 y^1，…，y^m 的 $2m$ 个偏微分方程而成的联立偏微分方程

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial u^j}=f_j{}^\alpha(u^1,u^2;y^1,\cdots,y^m)\ ,\ \begin{pmatrix}j=1,\ 2\\ \alpha=1,\cdots,m\end{pmatrix}\qquad(14.1)$$

但设 $f_j{}^\alpha$ 是变数 $(u^1,u^2;y^1,\cdots,y^m)$（在 R^{2+m} 的某域 D 里）的 C^∞ 函数。当任意给定 D 内的一点 $P_0(u_0{}^1,\ u_0{}^2;\ y_0{}^1,\cdots y_0{}^m)$ 时，满足初始条件

$$y^\alpha(u_0{}^1,\ u_0{}^2)=y_0{}^\alpha,\ (\alpha=1,\cdots,m)\qquad(14.2)$$

的 (14.1) 的解，在 P_0 的（包含于 D）充分小邻域 $U=\{(u^h;y^\alpha)|\,|u^h-u_0{}^h|<\varepsilon,|y^\alpha-y_0{}^\alpha|<\varepsilon\}$ $(\varepsilon>0)$ 内至少存在一个时，联立偏微分方程 (14.1) 叫做**完全可积的**。

定理 3.9 如果偏微分方程 (14.1) 是完全可积的，那末满足任意初始条件 (14.2) 的解只有一个。

定理 3.10 偏微分方程 (14.1) 为完全可积的充要条件是

$$\left(\frac{\partial f_i{}^\alpha}{\partial u^j}+\sum_\beta\frac{\partial f_i{}^\alpha}{\partial y^\beta}f_j{}^\beta\right)-\left(\frac{\partial f_j{}^\alpha}{\partial u^i}+\sum_\beta\frac{\partial f_j{}^\alpha}{\partial y^\beta}f_i{}^\beta\right)=0\quad(14.3)$$

恒成立。

条件 (14.3) 叫做偏微分方程 (14.1) 的**可积条件**。运用定理 3.9 与定理 3.10 来证明下列崩尼定理。

定理 3.11 （**崩尼**）给定在 $R^2=\{(u^1,u^2)|u^1,u^2\in R\}$ 内的域 $D=\{(u^1,u^2)|\,|u^1-a^1|<\varepsilon,\ |u^2-a^2|<\varepsilon\}$（$\varepsilon$ 为充分小正数）里定义

的C^∞函数 g_{ji} 与 H_{ji}，假设在D的各点下式成立。

$$g_{ji}=g_{ij},\quad H_{ji}=H_{ij}$$

还设 (g_{ji}) 为正定矩阵。如果g_{ji} 与 H_{ji}满足高斯方程（13.5）（它与（13.13）等价）与柯达齐方程(13.6)，即满足

$$R_{1212}=-\begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{vmatrix},\quad \begin{matrix} \nabla_1 H_{21}-\nabla_2 H_{11}=0 \\ \nabla_1 H_{22}-\nabla_2 H_{12}=0 \end{matrix} \tag{14.4}$$

时，以给定的 g_{ji} 与 H_{ji} 分别为第一基本量与第二基本量并且满足下列条件的局部曲面 $S: D\to E^3$ 存在：

设S的方程为 $x=x(u^1,u^2)$ $(a^1,a^2)\in D$，则

$$x(a^1,a^2)=A,\quad x_1(a^1,a^2)=B_1,\quad x_2(a^1,a^2)=B_2$$

但 A 为（E^3内的）任意向量，B_1 与 B_2 是满足条件

$$B_j\cdot B_i=g_{ji}(a^1,a^2)$$

的（E^3 内的）任意向量，而且这样局部曲面S只有一个。

〈证明〉 联立未知函数 x，x_1，x_2，N的偏微分方程（13.1），（13.2），（13.3）．此联立偏微分方程的可积条件是

$$\left(\begin{Bmatrix} h \\ ji \end{Bmatrix} x_h+H_{ji}N\right)-\left(\begin{Bmatrix} h \\ ij \end{Bmatrix} x_h+H_{ij}N\right)=0 \tag{14.5}$$

以及(13.5)，(13.6)，(13.10)．然而(14.5)是 $g_{ji}=g_{ij}$，$H_{ji}=H_{ij}$，$\begin{Bmatrix} h \\ ji \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} h \\ ij \end{Bmatrix}$，故恒成立。又如于§13 所示（13.10）与(13.6)等价，（13.13）与（13.5)等价。故须考虑的偏微分方程的可积条件是（13.6）与（13.13）．即（14.4）．

根据定理的假设，(14.4）成立，所以联立偏微分方程（13.1），（13.2），（13.3）完全可积．故满足初始条件

$$x(a^1,a^2)=A,\quad x_1(a^1,a^2)=B_1,\quad x_2(a^1,a^2)=B_2$$

$$N(a^1,a^2)=\frac{B_1\times B_2}{\|B_1\times B_2\|} \tag{14.6}$$

的解

$$x=x(u^1,u^2),\quad x_1=x_1(u^1,u^2),\quad x_2=x_2(u^1,u^2)$$

$$N=N(u^1,u^2) \tag{14.7}$$

存在，而且只存在一个。

首先证明解（14.7）恒满足

$$\boldsymbol{x}_j\cdot\boldsymbol{x}_i=g_{ji},\quad \boldsymbol{x}_j\cdot\boldsymbol{N}=0,\quad \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N}=1 \tag{14.8}$$

为此，令

$$F_{ji}=\boldsymbol{x}_j\cdot\boldsymbol{x}_i-g_{ji},\quad F_j=\boldsymbol{x}_j\cdot\boldsymbol{N},\quad F=\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N}-1 \tag{14.9}$$

考虑通过 (a^1,a^2) 在 D 内的 C^∞ 曲线 $c:u^h=u^h(t)$（设 $a^h=u^h(0)$），沿 c 微分这些式子得

$$\frac{dF_{ji}}{dt}=\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}_j}{\partial u^k}\cdot\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{x}_j\cdot\frac{\partial\boldsymbol{x}_i}{\partial u^k}-\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k}\right)\frac{du^k}{dt}$$

$$=\left[\left(\left\{{h\atop kj}\right\}\boldsymbol{x}_h+H_{kj}\boldsymbol{N}\right)\cdot\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{x}_j\cdot\left(\left\{{h\atop ki}\right\}\boldsymbol{x}_h+H_{ki}\boldsymbol{N}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\left\{{h\atop kj}\right\}g_{hi}+\left\{{h\atop ki}\right\}\right)g_{jh}\right]\frac{du^k}{dt}$$

$$\therefore\quad \frac{dF_{ji}}{dt}=\left[\left\{{h\atop kj}\right\}F_{hi}+\left\{{h\atop ki}\right\}F_{jh}+H_{kj}F_i\right.$$

$$\left.+H_{ki}F_j\right]\frac{du^k}{dt} \tag{14.10}$$

其次

$$\frac{dF_j}{dt}=\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}_j}{\partial u^k}\cdot\boldsymbol{N}+\boldsymbol{x}_j\cdot\frac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial u^k}\right)\frac{du^k}{dt}$$

$$=\left[\left(\left\{{h\atop kj}\right\}\boldsymbol{x}_h+H_{kj}\boldsymbol{N}\right)\cdot\boldsymbol{N}-H_k{}^h\boldsymbol{x}_h\cdot\boldsymbol{x}_j\right]\frac{du^k}{dt}$$

$$\therefore\quad \frac{dF_j}{dt}=\left[\left\{{h\atop kj}\right\}F_h+H_{kj}F-H_k{}^hF_{hj}\right]\frac{du^k}{dt} \tag{14.11}$$

还有

$$\frac{dF}{dt}=2\boldsymbol{N}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial u^k}\frac{du^k}{dt}=-2\boldsymbol{N}\cdot(H_k{}^h\boldsymbol{x}_h)\frac{du^k}{dt}$$

$$\therefore\quad \frac{dF}{dt}=-2H_k{}^hF_h\frac{du^k}{dt} \tag{14.12}$$

如果将（14.10），（14.11），（14.12）看做未知函数 F_{ji},F_i,F 的

联立常微分方程，由其右边的形状可见它们有解$F_{ji}=0$，$F_i=0$，$F=0$。显然，这组解满足初始条件

$$F_{ji}(a^1,a^2)=0,\ F_i(a^1,a^2)=0,\ F(a^1,a^2)=0 \quad (14.13)$$

然而，用（14.7）以（14.9）定义的F_{ji}，F_i，F 沿曲线 c 是常微分方程(14.10)，(14.11)，(14.12)的解，而且满足初始条件(14.13)．故由解的唯一性可见，这两组解一致。即用（14.7）以(14.9)定义的F_{ji}，F_i，F 沿曲线c恒等于0．故沿曲线c，（14.8）恒成立．又因域内任意的点与点(a^1,a^2)相连的 C^∞ 曲线 c 存在，所以对于(14.7)，（14.8）在D内恒成立．

以下说明在解（14.7）里出现的

$$x=x(u^1,u^2)$$

定义局部曲面．为此，运用从（14.8）得到的

$$x_1\cdot x_1=g_{11}>0,\quad x_2\cdot x_2=g_{22}>0$$

以及（g_{ji}）为正定矩阵，则可作如下推论。

$$(x_1\times x_2)\cdot(x_1\times x_2)=(x_1\cdot x_1)(x_2\cdot x_2)-(x_1\cdot x_2)^2$$
$$=g_{11}g_{22}-g_{12}^2>0$$
$$\therefore \qquad x_1\times x_2\neq 0$$

这说明 $x=x(u^1,u^2)$定义一个局部曲面S．再从（14.8）与(13.2)可见

$$x_j\cdot x_i=g_{ji},\quad \frac{\partial x_i}{\partial u^j}=\left\{ {h \atop ji} \right\}x_h+H_{ji}N$$

成立。即局部曲面S的第一基本量与第二基本量分别为预先给定的g_{ji} 与H_{ji}，而且根据偏微分方程(13.1)，(13.2)，13.3）的解的唯一性可知，满足（14.6）的这样局部曲面只有一个。（证毕）

定理 3.12 如果存在两个局部曲面 $S:D\to E^3$ 与 $\overline{S}:D\to E^3$ 分别以相同的 g_{ji} 与 H_{ji}为其第一基本量与第二基本量，则S与$\overline{S}$合同。

〈证明〉 设局部曲面S与$\overline{S}$的方程分别为 $x=x(u^1,u^2)$ 与 $x=\overline{x}(u^1,u^2)$．又设S与$\overline{S}$分别满足初始条件

$$x(a^1,a^2)=A,\ x_1(a^1,a^2)=B_1,\ x_2(a^1,a^2)=B_2,$$

$$\boldsymbol{B}_j \cdot \boldsymbol{B}_i = g_{ji}(a^1, a^2);$$

$$\overline{\boldsymbol{x}}(a^1, a^2) = \overline{\boldsymbol{A}},\ \overline{\boldsymbol{x}}_1(a^1, a^2) = \overline{\boldsymbol{B}}_1,\ \overline{\boldsymbol{x}}_2(a^1, a^2) = \overline{\boldsymbol{B}}_2,$$

$$\overline{\boldsymbol{B}_j} \cdot \overline{\boldsymbol{B}_i} = g_{ji}(a^1, a^2)$$

再设

$$\boldsymbol{N}(a^1, a^2) = \frac{\boldsymbol{B}_1 \times \boldsymbol{B}_2}{\|\boldsymbol{B}_1 \times \boldsymbol{B}_2\|},\ \overline{\boldsymbol{N}}(a^1, a^2) = \frac{\overline{\boldsymbol{B}}_1 \times \overline{\boldsymbol{B}}_2}{\|\overline{\boldsymbol{B}}_1 \times \overline{\boldsymbol{B}}_2\|}$$

这时存在 E^3 的运动 T：$E^3 \to E^3$ 使得

$$T(\boldsymbol{A}) = \overline{\boldsymbol{A}},\ T(\boldsymbol{B}_1) = \overline{\boldsymbol{B}}_1,\ T(\boldsymbol{B}_2) = \overline{\boldsymbol{B}}_2,$$

$$T(\boldsymbol{N}(a^1, a^2)) = \overline{\boldsymbol{N}}(a^1, a^2)$$

而且这样运动 T 只有一个．在此运动 T 下，移动曲面 S 而得的曲面 $\widetilde{S} = T \circ S: D \to E^3$，显然与 $\overline{S}$ 有相同的第一、第二基本量 g_{ji}，H_{ji}．故 $\overline{S}$ 与 $\widetilde{S}$ 有相同的第一、第二基本量 g_{ji}，H_{ji}，而且满足

$$\overline{\boldsymbol{x}}(a^1, a^2) = \widetilde{\boldsymbol{x}}(a^1, a^2),\ \overline{\boldsymbol{x}}_1(a^1, a^2) = \widetilde{\boldsymbol{x}}_1(a^1, a^2),$$

$$\overline{\boldsymbol{x}}_2(a^1, a^2) = \widetilde{\boldsymbol{x}}_2(a^1, a^2)$$

$$\overline{\boldsymbol{N}}(a^1, a^2) = \widetilde{\boldsymbol{N}}(a^1, a^2)$$

式中设 $\widetilde{S}$ 的方程为 $\boldsymbol{x} = \widetilde{\boldsymbol{x}}(u^1, u^2)$，$\overline{\boldsymbol{N}}$ 与 $\widetilde{\boldsymbol{N}}$ 分别为 $\overline{S}$ 与 $\widetilde{S}$ 的单位法向量．故由定理 3.11 知（因为 $\overline{S}$ 与 S 是给定的曲面，所以它们满足(14．4))，$\overline{S}$ 与 $\widetilde{S}$ 一致．即 $\overline{S} = \widetilde{S} = T \circ S$，故 S 与 $\overline{S}$ 合同．　　（证毕）

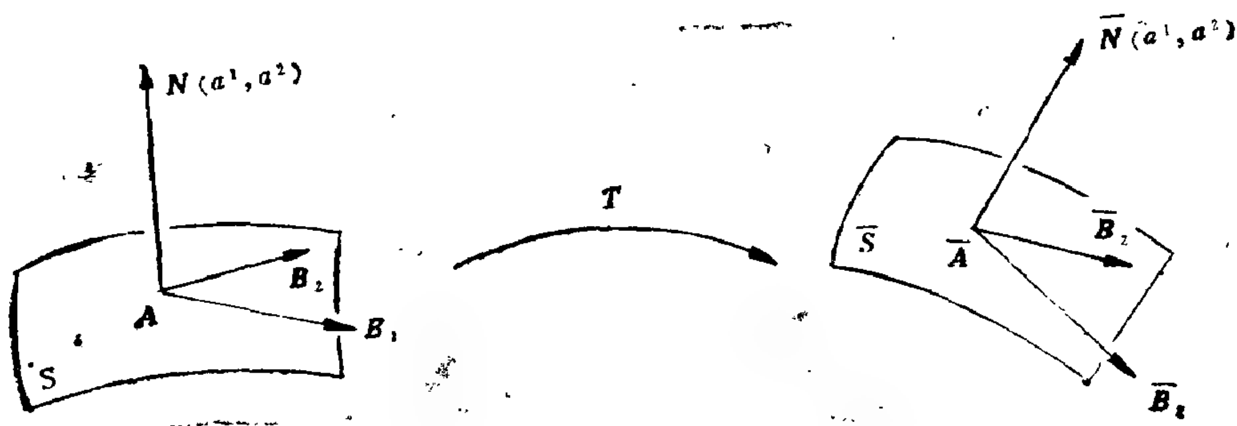


图 3.2

§15 曲面的映射

设给定从曲面S到曲面$\overline{S}$中的连续映射 $\varphi: S\to\overline{S}$. 任取$S$的坐标邻域 (U,θ,O)，当$(U,\varphi\circ\theta,\overline{O})$ $(\overline{O}=\varphi(O)\subset\overline{S})$) 为局部曲面时，即 $(U,\varphi\circ\theta,\overline{O})$ 为$\overline{S}$的坐标邻域时，映射 φ: $S\to\overline{S}$叫做**正则映射**. 即，如果S在任意坐标邻域O的局部表示为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$, $((u,v)\in U)$，而且

$$\boldsymbol{x}=\overline{\boldsymbol{x}}(u,v)=\varphi(\boldsymbol{x}(u,v)),\ ((u,v)\in U) \qquad (15.1)$$

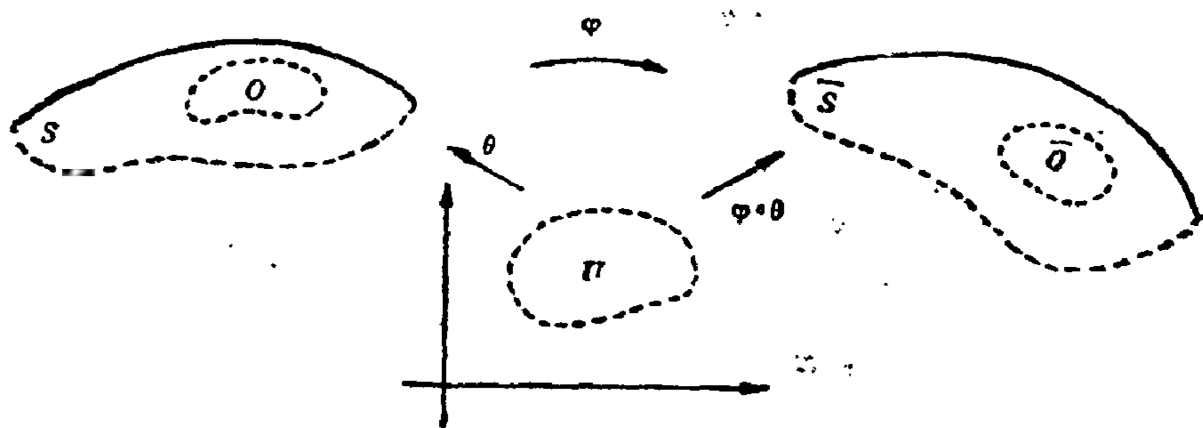


图 3.3

是$\overline{S}$的一种局部表示，则$\varphi: S\to\overline{S}$为正则映射. 这样，用局部表示(15.1) 表示$\overline{S}$时，则称$S$与$\overline{S}$分别在坐标邻域$O$与$\overline{O}=\varphi(O)$里可用**共通的坐标系** (u,v) 表示.

例 15.1 设S^2为半径$\frac{1}{2}$的球面，其方程为

$$x^2+y^2+z^2-z=0$$

设从 S^2 去掉点$N(0,0,1)$而得的曲面为S，设 xy 平面 $z=0$ 为$\overline{S}$. 在S上取任意点 P，设直线 NP 与$\overline{S}$的交点为$\overline{P}$. 根据对应 f: $P\to\overline{P}$定义映射$f: S\to\overline{S}$. 设点P与$\overline{P}$的位置向量分别为$\boldsymbol{x}$与$\overline{\boldsymbol{x}}$，则

当 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$时，

$$\bar{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\0\end{pmatrix},\quad \xi=\frac{x}{1-z},$$

$$\eta=\frac{y}{1-z}\qquad(15.2)$$

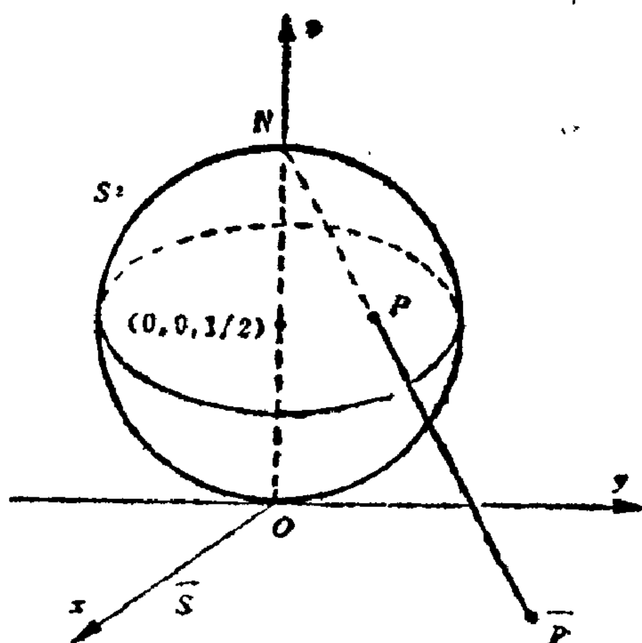


图 3.4

显然，此 f：$S\to\bar{S}$ 为正则映射。这样 f：$S\to\bar{S}$ 叫做球面 S^2 的**极射影**。S 可用下列三个局部曲面 O_1, O_2, O_3 复盖[1)]。

$$O_1:\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta\sin\varphi\\\sin\theta\sin\varphi\\1+\cos\varphi\end{pmatrix},\quad\left(0<\varphi<\pi,\quad 0<\theta<\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$O_2:\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\bar{\theta}\sin\bar{\varphi}\\\sin\bar{\theta}\sin\bar{\varphi}\\1+\cos\bar{\varphi}\end{pmatrix},$$

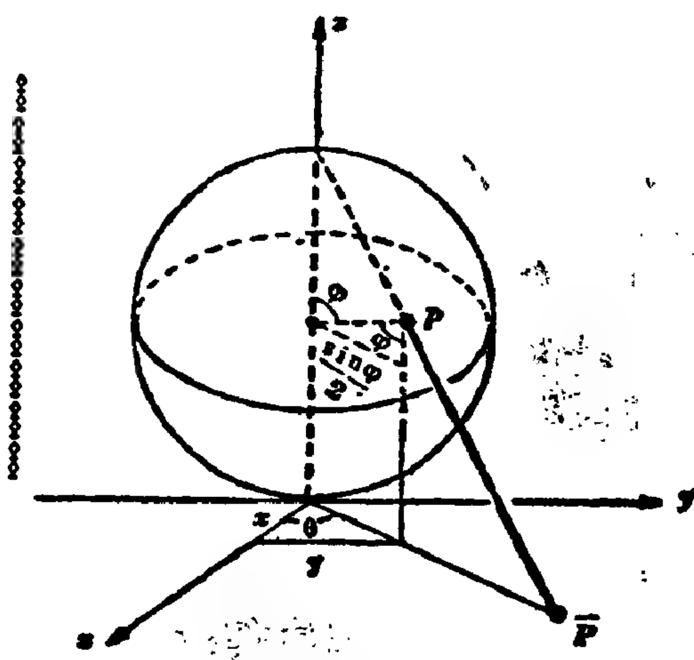
$$\left(0<\bar{\varphi}<\pi,\quad 0<\bar{\theta}<\frac{5\pi}{2}\right)$$

$$O_3:\quad\boldsymbol{x}=$$

$$=\begin{pmatrix}x\\y\\\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}\end{pmatrix},$$

$$\left(x^2+y^2<\frac{1}{4}\right)$$

1) 见下图。（译者注）



运用（15.2）可见，关于$f(O_1)$，$\overline{S}$的下列局部表示成立。

$$\overline{x}=\frac{1}{1-\cos\varphi}\begin{pmatrix}\cos\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ 0\end{pmatrix},\quad \left(0<\varphi<\pi,0<\theta<\frac{3\pi}{2}\right)$$

在平面$\overline{S}$上，考虑圆 c

$$A(\xi^2+\eta^2)+B\xi+C\eta+D=0$$

将（15.2）与球面的方程 $x^2+y^2=-z^2+z$ 代入此式，可导出一个一次方程

$$Bx+Cy+(A-D)z+D=0$$

可见，S上的圆（S与平面π的交线）变为$\overline{S}$的圆Γ。特别是平面π通过点$N(0,0,1)(A=0)$时，圆Γ为直线。

例 15.2 半球面 S：$x^2+y^2+z^2-z=0$，$z<\frac{1}{2}$的中心为$C\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$。设$xy$平面 $z=0$ 为$\overline{S}$。对于S上的任意点P，直线CP和$\overline{S}$的交点$\overline{P}$与之对应，由此可定义映射$f:S\to\overline{S}$。用与例15.1相同方法可见，此f为正则映射。根据这个正则映射f，S上的大圆变为平面$\overline{S}$上的直线，这个f叫做**中心射影**。

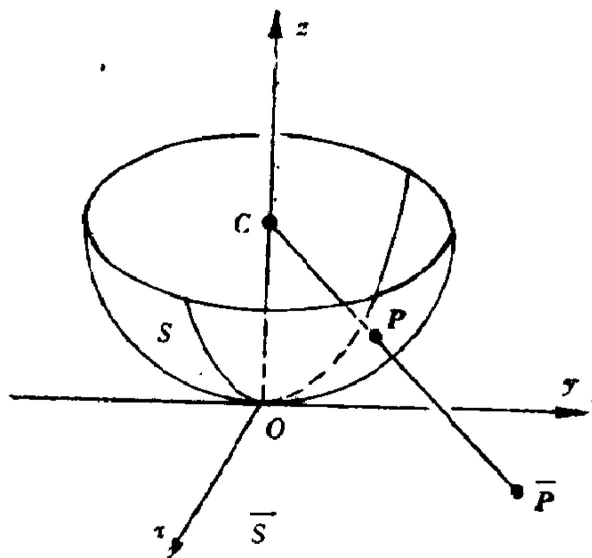


图 3.5

例 15.3 设S为xy平面$z=0$。设$\overline{S}$为圆柱面$x^2+y^2=a^2(a>0)$。将平面S卷在圆柱面$\overline{S}$上而得映射 $f:S\to\overline{S}$。设S上任意点P与$\overline{P}=f(P)$的位置向量分别为 x 与 $\overline{x}$，则得

如果

$$x=\begin{pmatrix}x\\ y\\ 0\end{pmatrix},$$

那末

$$\bar{x}=\begin{pmatrix} a\cos\dfrac{x}{a} \\ a\sin\dfrac{x}{a} \\ y \end{pmatrix}^{1)}$$

这时

$$\|\bar{x}_x\times\bar{x}_y\|=1\neq 0^{2)}$$

故 $S\to\bar{S}$ 为正则映射.

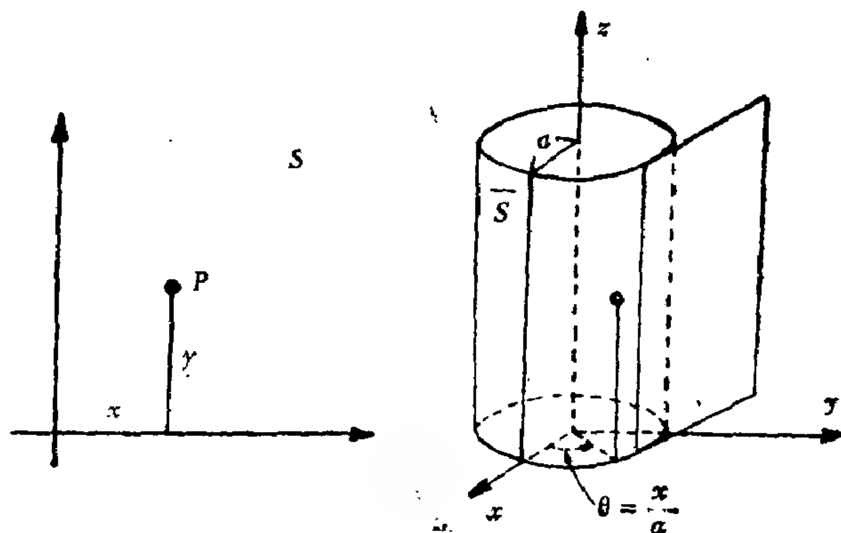
定理 3.13 对于二曲面 S, $\bar{S}$，设 φ: $S\to\bar{S}$ 为正则映射.这时，对于 S 的任意点 P，存在 P 的邻域 W 使 φ 在 W 上的限制是 W 及其象 $\bar{W}=f(W)$ $(\subset\bar{S})$ 之间的拓扑映射(在这种情况下，有时称 φ: $S\to\bar{S}$ 为**局部拓扑映射**).

〈**证明**〉 根据正则映射的定义与局部曲面的定义，显然此定理成立.

设 φ: $S\to\bar{S}$ 为从曲面 S 到曲面 $\bar{S}$ 中的正则映射. 设 c: $I\to S$

---

1) 原书有误.(见下图)原文是 $\bar{x}=\begin{pmatrix} a\cos x \\ a\sin x \\ y \end{pmatrix}$ (译者注)



2) 原文是 $\|\bar{x}_u\times\bar{x}_v\|=a\neq 0$ (译者注)

为一条曲线，则曲线 $\bar{c}=\varphi\circ c: I\to\bar{S}$ 叫做在 φ 下 c 的**象**，以 $\varphi(c)$ 记之．这时下列定理成立。其证明容易。

定理 3.14 曲面 S 上的正则曲线 c 在正则映射 f: $S\to\bar{S}$ 下的象 $\bar{c}$ 是正则曲线。

正则映射的微分映射 设 φ: $S\to\bar{S}$ 为从曲面 S 到曲面 $\bar{S}$ 中的正则映射。取一点 $P\in S$，设 $\bar{P}=\varphi(P)\in\bar{S}$。取 S 在点 P 处的切向量 $\boldsymbol{A}$ (即 $\boldsymbol{A}\in T_P(S)$)．取 $\bar{S}$ 上的任意 C^∞ 函数 $\bar{f}$，考虑 S 上的 C^∞ 函数 $f=\bar{f}\circ\varphi$．这时，可根据

$$\bar{\boldsymbol{A}}\bar{f}=\boldsymbol{A}f=\boldsymbol{A}(\bar{f}\circ\varphi) \tag{15.3}$$

定义在点 $\bar{P}$ 处 $\bar{S}$ 的切向量 $\bar{\boldsymbol{A}}$ （参照下列〔问题15.1〕)．此 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 以

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\varphi_P{}^*(\boldsymbol{A}) \tag{15.4}$$

表示之，则决定线性映射

$$\varphi_P{}^*: T_P(S)\to T_{\varphi(P)}(\bar{S})$$

（参照下列〔问题 15.1〕)．这个 $\varphi_P{}^*$ 叫做正则映射 $\varphi: S\to\bar{S}$ 在点 P 的**微分映射**。

【问题 15.1】 当 $\varphi: S\to\bar{S}$ 为正则映射时，在 S 的坐标邻域 O 与 $\bar{S}$ 的坐标邻域 $\bar{O}=\varphi(O)$ 使用共通的坐标系 (u,v)，则对于在点 $P\in O$ 处 S 的切向量 $\boldsymbol{A}=A^1(\boldsymbol{x}_u)_P+A^2(\boldsymbol{x}_v)_P$，

$$\varphi_P{}^*(\boldsymbol{A})=A^1(\bar{\boldsymbol{x}}_u)_{\bar{P}}+A^2(\bar{\boldsymbol{x}}_v)_{\bar{P}},\quad (\bar{P}=\varphi(P)\in\bar{O}) \tag{15.5}$$

成立（即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\varphi_P{}^*(\boldsymbol{A})$ 有相同的分量）。试证明之。但式中设 $\bar{\boldsymbol{x}}=\varphi\circ\boldsymbol{x}$。

定理 3.15 设 S，$\bar{S}$，$\tilde{S}$ 为曲面．如果 φ: $S\to\bar{S}$ 与 ψ: $\bar{S}\to\tilde{S}$ 都是正则映射，那末复合映射 $\psi\circ\varphi: S\to\tilde{S}$ 为正则映射。

〈证明〉 从正则映射的定义，显然此定理成立。

定理 3.16 如果 $\varphi: S\to\bar{S}$ 为从曲面 S 到曲面 $\bar{S}$ 上的同胚映射，而且是正则映射，则 φ^{-1}: $\bar{S}\to S$ 也是正则映射。

此定理 3.16 里的 φ: $S\to\bar{S}$ 叫做**正则同胚映射**。当映射 φ: $S\to\bar{S}$ 为正则同胚时，则称 S 与 $\bar{S}$ 是**正则同胚的曲面**。

〈定理 3.16 的证明〉 设 $\mathscr{B}$ 为曲面S的图册。任意取局部曲面$(U,\theta,O)\in\mathscr{B}$，作局部曲面 $(U,\varphi\cdot\theta,\varphi(O))$ ，于是它是$\overline{S}$的坐标邻域. 作

$$\overline{\mathscr{B}}=\{(U,\varphi\circ\theta,\varphi(O))\mid(U,\theta,O)\in\mathscr{B}\}$$

因φ是正则映射，故可将$\overline{\mathscr{B}}$看做$\overline{S}$的图册.如果从$\overline{\mathscr{B}}$任意取局部曲面$(U,\overline{\theta},\overline{O})$,则$(U,\varphi^{-1}\circ\overline{\theta},\ \varphi^{-1}(\overline{O}))=(U,\theta,O)$,（但式中设$\overline{\theta}=\varphi\circ\theta$, $\overline{O}=\varphi(O)$)，故它是S的坐标邻域，从而φ^{-1}为正则映射.（证毕）

设 $\varphi: S\to\overline{S}$为正则同胚，$X$为$S$的任意向量场,则在$\overline{S}$上可定义

$$\overline{X}_{\varphi(P)}=\varphi_P(X_P),\quad(P\in S)\qquad(15.6)$$

为向量场，此向量场以

$$\overline{X}=\varphi^*(X)$$

表示。 φ^* 叫做φ的**微分映射。**

【问题 15.2】 运用前页〔问题 15.1〕的结果，对于正则同胚 φ: $S\to\overline{S}$，试证用 (15.6) 可定义$\overline{S}$上的一向量场$\overline{X}$。

【问题 15.3】 对于S上的任意向量场X与任意C^∞函数 f，试证

$$\varphi^*(X)(f\circ\varphi^{-1})=(Xf)\circ\varphi$$

成立。但设 φ: $S\to\overline{S}$为正则同胚。

【问题 15.4】 (1) 设 φ: $S\to\overline{S}$为正则映射。设S的一个坐标邻域 O 的坐标系为 $(u^1,\ u^2)$, $\overline{S}$的一个坐标邻域$\overline{O}$的坐标系为$(\overline{u}^1,\ \overline{u}^2)$。对于$O\cap\varphi^{-1}(\overline{O})$内的点$P$在$O$的坐标 (u^1,u^2)与 $\varphi(P)$在$\overline{O}$的坐标$(\overline{u}^1,\overline{u}^2)$ 对应之，则得 C^∞ 函数 $\overline{u}^h=\overline{u}^h(u^1,u^2)$. 试证明之.

(2) 设P处的切向量A在O的分量为 (A^1,A^2), $\overline{A}=\varphi_P{}^*(A)$在$\overline{O}$的分量为 $(\overline{A}^1,\ \overline{A}^2)$。试证下式。

$$\overline{A}^h=\left(\frac{\partial\overline{u}^h}{\partial u^i}\right)_P A^i$$

§16 等距映射

设 φ: $S\to\overline{S}$为从曲面S到$\overline{S}$上的正则同胚，而且对S上的任意正则曲线c,在φ下c的象$\varphi(c)$与c有相同的弧长,即$L(\varphi(c))=L(c)$。

这时，φ 叫做**等距映射**，并说曲面 S 与 $\overline{S}$ **等距**。例如，将一张纸 S 光滑地、无伸缩地变形之，可得如下图 3.6 所示各种曲面 $\overline{S}$，$\widetilde{S}$，…，这些都和 S 等距。



图 3.6

由定理 3.16 可见，如果 φ：$S\to\widetilde{S}$ 是等距映射，则 φ^{-1}：$\widetilde{S}\to S$ 也是等距映射．又如果 φ：$S\to\overline{S}$ 与 ψ：$\overline{S}\to\widetilde{S}$ 是等距映射，则复合映射 $\psi\circ\varphi$：$S\to\widetilde{S}$ 也是等距映射（参照定理 3.15）.从而可将 E^3 中的曲面全体的集按互相等距的曲面而分类。

定理 3.17 C^∞ 同胚 φ：$S\to\overline{S}$ 为等距映射的充要条件是：对于 S 的任意坐标邻域 O，使用 O 与 $\overline{O}=\varphi(O)$ 中的共通坐标时，

$$\overline{E}=E,\quad \overline{F}=F,\quad \overline{G}=G \quad 即\ \overline{g}_{ji}=g_{ji}$$

成立。式中 E,F,G（即 g_{ji}）为 S 在 O 里的第一基本量；$\overline{E}$，$\overline{F}$，$\overline{G}$（即 $\overline{g}_{ji}$）为 $\overline{S}$ 在 $\overline{O}$ 里的第一基本量。

〈**证明**〉 设 φ：$S\to\overline{S}$ 为等距映射．任取曲线 c：$I\to O(\subset S)$，则 $\varphi(c)$ 为 $\varphi\circ c$：$I\to\overline{O}(\subset\overline{S})$．如设 $I=[a,b]$，则由（8.12）得

$$L(c)=\int_a^b\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_a^b\sqrt{\overline{E}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2\overline{F}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+\overline{G}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=L(\varphi(c))$$

上式两边对积分上限 b 微分之得

$$E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

$$= \overline{E}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\overline{F}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \overline{G}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

此式对于任意 C^∞ 函数 $u = u(t)$，$v = v(t)$ $(t \in I)$成立，故

$$\overline{E} = E，\overline{F} = F，\overline{G} = G$$

反之，如果$\overline{E} = E$，$\overline{F} = F$，$\overline{G} = G$在S的任意坐标邻域O里成立时，根据求弧长公式(8.12)可见，对于S上的任意曲线c，$L(c) = L(\varphi(c))$ 成立。（证毕）

曲面上的几何学　在曲面S的性质或曲面S上的图形性质之中，在S的等距映射之下不变的性质叫做曲面的**内蕴性质**(intrinsic property)。研究曲面的内蕴性质的几何学叫做**曲面上的几何学**。由定理3.17 可见，曲面或曲面上图形性质是内蕴性质的充要条件是：它只能用曲面的第一基本量E，F，G(或g_{ji})以及其偏导函数写出来。例如，曲面的全曲率，曲面上的曲线之长，二切向量的夹角，曲面内的距离，曲面上的曲线的测地曲率，测地线等都是曲面的内蕴性质。要想研究曲面上的几何学，需要推广曲面的概念，通过研究第四章与第五章所述**二维黎曼空间**的性质才能达到目的，因此在这里不特别展开曲面上的几何学研究。

【问题 16.1】　试证下列各量是曲面的内蕴性质。

（1）　曲面的全曲率　　（2）　曲面上的曲线之弧长

（3）　切向量之长　　（4）　曲面上图形的面积

（5）　曲面内的距离　　（6）　曲面上的曲线的测地曲率

（7）　测地线　　（8）　二切向量的夹角

习　题　三

1.　关于曲面S，令

$$C_{ji} = \frac{\partial N}{\partial u^j}\cdot\frac{\partial N}{\partial u^i}$$

它叫做S的**第三基本量**。试证下式。

$$C_{ji} - 2hH_{ji} + Kg_{ji} = 0$$

式中 g_{ji}，H_{ji}，h 与K分别是第一基本量，第二基本量，平均曲率与全曲率（设坐标曲线为曲率线来证明）．

2． 试证曲面：$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 的全曲率K可用下式表达。

$$K=\frac{|\boldsymbol{x}_{uu}\,\boldsymbol{x}_u\,\boldsymbol{x}_v|\cdot|\boldsymbol{x}_{vv}\,\boldsymbol{x}_u\,\boldsymbol{x}_v|-|\boldsymbol{x}_{uv}\,\boldsymbol{x}_u\,\boldsymbol{x}_v|^2}{(EG-F^2)^2}$$

3． 在曲面S上的一点P，任取互相正交的单位切向量$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，则全曲率在P处的值 K_P 由

$$\begin{aligned}K_P&=H(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A})H(\boldsymbol{B},\boldsymbol{B})-H(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})^2\\&=(L(\boldsymbol{A}),\boldsymbol{A})(L(\boldsymbol{B}),\boldsymbol{B})-(L(\boldsymbol{A}),\boldsymbol{B})^2\end{aligned}$$

而定，试证明之。

4． 在 E^3 内，对于曲线C：$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(s)$（$s$ 为弧长），由方程

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(s)+v\boldsymbol{t}(s),\ \left(v>0,\boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{y}(s)}{ds}\right)$$

所表示的曲面S叫做曲线C的**切线曲面**.但设C的曲率 κ 到处不为0。这时，曲面S的充分小邻域与平面的一部分等距。试证明之。

5． 当坐标曲线为曲率线时，试证柯达齐方程（13.6）与

$$\frac{\partial k_1}{\partial v}=\frac{1}{2}\frac{E_v}{E}(k_2-k_1),\ \frac{\partial k_2}{\partial u}=\frac{1}{2}\frac{G_u}{G}(k_1-k_2)$$

等价．但 k_1 与 k_2 分别是u 曲线与 v 曲线的主曲率。

6． 当曲面S的第一基本量，第二基本量分别为

$$E=1,F=0,G=1;L=-1,M=0,N=0$$

时，则S是底面半径为1的圆柱面的一部分．试证明之。

7． 考虑从曲面S到$\overline{S}$之中的正则映射 φ：$S\rightarrow\overline{S}$．对于S上的任意正则曲线 c，$L(c)=L(\varphi(c))$ 成立时，φ 叫做**局部等距映射**。正则映射φ为局部等距映射的充要条件是：对于S上任意点P处任意二切向量（S的）$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})_P=(\varphi_P{}^*(\boldsymbol{A}),\ \varphi_P{}^*(\boldsymbol{B}))_{\varphi(P)}$$

成立。但符号（ ， ）在左右两边分别表示在S与$\overline{S}$的内积。试证明之。

8. 已知回转面 S： $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$，其中

$$\boldsymbol{x}(u,v)=\begin{pmatrix}\cos u\cosh v\\ \sin u\cosh v\\ v\end{pmatrix},\quad (0<u<2\pi,\ -\infty<v<\infty)$$

以及曲面$\overline{S}$： $\overline{\boldsymbol{x}}=\overline{\boldsymbol{x}}(\overline{u},\overline{v})$，式中

$$\overline{\boldsymbol{x}}(\overline{u},\overline{v})=\begin{pmatrix}\overline{u}\cos\overline{v}\\ \overline{u}\sin\overline{v}\\ \overline{v}\end{pmatrix},\quad (0<\overline{v}<2\pi,\ -\infty<\overline{u}<\infty)$$

定义映射 φ： $S\to\overline{S}$ 为

$$\varphi(\boldsymbol{x}(u,v))=\overline{\boldsymbol{x}}(\sinh v,u)$$

则 φ 为等距映射．试证明之。

9. 设已知从曲面S到$\overline{S}$的正则映射 φ： $S\to\overline{S}$。对于S的任意点P处任意二（S的）切向量$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，假设

$$\lambda(P)(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})_P=(\varphi_P{}^*(\boldsymbol{A}),\ \varphi_P{}^*(\boldsymbol{B}))_{\varphi(P)}$$

成立。但 λ： $S\to\boldsymbol{R}$是取正值的 C^∞ 函数.此时，φ： $S\to\overline{S}$叫做**局部共形**[1]**映射**. 当存在局部共形映射 φ：$S\to\overline{S}$时，就说S与$\overline{S}$ **局部共形**。试证下列事实。

(1) 正则映射 φ： $S\to\overline{S}$为局部共形映射的充要条件是

$$\overline{E}=\lambda E,\ \overline{F}=\lambda F,\ \overline{G}=\lambda G\ \text{或}\ \overline{g}_{ji}=\lambda g_{ji}$$

成立（在S的任意坐标邻域O与 $\varphi(O)$使用共通坐标系）。

(2) φ 为局部共形映射的充要条件是：对于任意的点$P(\in S)$与P处的任意（S的）切向量$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$；$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$的夹角与 $\varphi_P{}^*(\boldsymbol{A})$ 与 $\varphi_P{}^*(\boldsymbol{B})$的夹角相等。

(3) 当 $\overline{g}_{ji}=\lambda g_{ji}$ 时，则$\overline{S}$与S的克氏记号之间成立如下关系。

$$\overline{\begin{Bmatrix}h\\ ji\end{Bmatrix}}=\begin{Bmatrix}h\\ ji\end{Bmatrix}+\delta_j^h\lambda_i+\delta_i^h\lambda_j-\lambda^h g_{ji}$$

但式中令 $\lambda_j=\partial_j\lambda$， $\lambda^h=g^{hi}\lambda_i$。

(4) 对于局部共形映射 φ，当 λ 为常数 a^2 时，φ 叫做**局部相似**

---

1) “共形”和“保角”是同义语。（译者注）

映射．局部共形映射 φ 为局部相似映射的充要条件是

$$\overline{\left\{ {h \atop j\,i} \right\}} = \left\{ {h \atop j\,i} \right\}$$

成立。

（5） 当 φ： $S \to \overline{S}$ 为局部相似映射时，对于任意的点 $P \in S$，下式成立。

$$\overline{K}_{\varphi(P)} = a^2 K_P$$

但 K 与 $\overline{K}$ 分别为 S 与 $\overline{S}$ 的全曲率。

（6） 当 φ： $S \to \overline{S}$ 为局部相似映射时，对于 S 上的任意向量场 X，Y，

$$\varphi^*(\nabla_Y X) = \overline{\nabla}_{\varphi_*(Y)} \varphi^*(X)$$

成立。但 ∇ 与 $\overline{\nabla}$ 分别表示 S 与 $\overline{S}$ 的共变微分。

10． 曲面 S 上的测地线全是直线的充要条件是： S 的第二基本量为０。试证明之。

11． 如于例 15.1 所示，从球面 S^2 的一部分 S 到平面 $\overline{S}$ 上的极射影 f： $S \to \overline{S}$ 在 S^2 的局部坐标邻域 O_3 内考虑之，则得

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1-z)^2(d\xi^2 + d\eta^2) = (1-z^2)d\overline{s}^2$$

试证明之。但 ds^2 与 $d\overline{s}^2$ 是在 f 下对应点处 S 与 $\overline{S}$ 的线素.（即极射影是局部共形映射.）

12． 在从 S 到 $\overline{S}$ 中的正则映射 f：$S \to \overline{S}$ 下，克氏记号之间有关系

$$\overline{\left\{ {h \atop j\,i} \right\}} = \left\{ {h \atop j\,i} \right\} + \delta_j^h \varphi_i + \delta_i^h \varphi_j$$

（φ_i 为各坐标邻域内定义的 n 个 C^∞ 函数）时，则 S 的测地线 c 的象 $f(c)$ 是 $\overline{S}$ 的测地线．试证明之。这样映射 f 叫做 **局部射影映射**．（例 15.2 中给定的中心射影是局部射影映射。）

13． 对于曲面 S，等距映射 φ：$S \to S$ 叫做曲面 S 的**等距变换**．试证以下事实。

（1） 曲面 S 的等距变换全体作成群（关于映射的复合）．此群 G 叫做曲面 S 的**等距变换群**．有时把 G 的子群叫做曲面 S 的等距变换群。

（2） 设曲面S的等距变换群为G。任取S的二点P与Q，如果存在G的元φ满足$Q=\varphi(P)$，那末G叫做在S上是**可迁**的．当曲面S的等距变换群G在S上是可迁的，则S的全曲率K一定。

（3） 如果闭曲面S的等距变换群G在S上是可迁的．那末S是球面或者是其一部分（其实，在这种情况下，S是球面）。

《注意》 欧氏空间E^3绕原点O的回转全体作成回转群$SO(3)$。在以O为中心的球面S^2上，$SO(3)$做为等距变换群作用于其上，而且是可迁的。还有E^2的运动全体是E^2上的等距变换群，而且是可迁的。

14． 试证下列事实。

（1） 球面与平面的任何部分也不是局部等距。

（2） 球面不能以局部相似映射映在平面的任何部分。

《注意》 根据上述习题 14 可见，地球表面上的图形不能在平面上画出它的相似图形。即在平面上画不出忠实的地图。

15． 设$\varphi: S\to\overline{S}$为从曲面$S$到$\overline{S}$上的等距映射，在$S$的各坐标邻域$O$里，又设

$$H(X,\ Y)=\overline{H}(\varphi^*(X),\varphi^*(Y))\circ\varphi$$

对任意向量场X，Y成立。即在O与$\varphi(O)$使用共通坐标系，设

$$H_{ji}=\overline{H}_{ji}$$

但H与$\overline{H}$分别是S与$\overline{S}$的第二基本量，H_{ji}与$\overline{H}_{ji}$分别为H与$\overline{H}$的分量．这时S与$\overline{S}$合同，φ是E^3的一运动在S上的限制．试证明之。

第四章　流　　形

§17　流　　形

$R^n=\{(x^1,\cdots,x^n)\mid x^1,\cdots,x^n\in R\}$叫做$n$维**数空间**。当给定从$R^n$的开集$U$到$R^n$中的映射$f: U\to R^n$时，取任意点$P(x^1,\cdots,x^n)\in U$，设$f(P)(\in R^n)$的坐标为$(\bar{x}^1,\cdots,\bar{x}^n)$，则各$\bar{x}^h$为$(x^1,\cdots,x^n)$的函数，得到定义在$U$上的$n$个函数$\bar{x}^h(x^1,\cdots,x^n)$　$(h=1,\cdots,n)$。这时，人们说可用方程

$$\bar{x}^h=\bar{x}^h(x^1,\cdots,x^n),\ (x^1,\cdots,x^n)\in U \tag{17.1}$$

表示映射$f:U\to R^n$。如果(17.1)的右边函数$\bar{x}^h(x^1,\cdots,x^n)$　$(h=1,\cdots,n)$是C^∞函数，那末映射$f:U\to R^n$叫做**C^∞映射**。再设$\bar{U}=f(U)$，当$f:U\to\bar{U}$是同胚映射而且$f:U\to\bar{U}$与$f^{-1}:\bar{U}\to U$全是C^∞映射时，则$f:U\to\bar{U}$叫做**C^∞同胚映射**。

定义　设M为豪斯道夫（满足分离公理）拓扑空间，n为自然数。给定M的开集合族$\{O_\alpha\mid\alpha\in A\}$　(A为某集)，而且对其各元O_α给定同胚映射$\theta_\alpha: O_\alpha\to U_\alpha$　(U_α为R^n的开集)，并满足下列条件(i)，(ii)时，就说$\mathscr{S}=\{(U_\alpha,\theta_\alpha,O_\alpha)\mid\alpha\in A\}$给$M$以**微分流形的结构**，$M$叫做**微分流形**，或简略地说**流形**。说这个流形M的维是n，以$\dim M=n$表示。

(i)　$M=\bigcup_{\alpha\in A}O_\alpha$　(即$\{O_\alpha\mid\alpha\in A\}$是$M$的开复盖)。

(ii)　当$O_\alpha\cap O_\beta\neq\varnothing$　(α, $\beta\in A$)时，令$O_{\alpha\beta}=O_\alpha\cap O_\beta$，则映射

$$\theta_\alpha\circ\theta_\beta^{-1}:\theta_\beta(O_{\alpha\beta})\to\theta_\alpha(O_{\alpha\beta})$$

是C^∞同胚映射。（其中，$\theta_\beta(O_{\alpha\beta})$与$\theta_\alpha(O_{\alpha\beta})$是$R^n$的开子集。）

这时，$\mathscr{S}$叫做流形M的**图册**(atlas)．本书假设流形M满足第二可数公理，并且M是连通的。

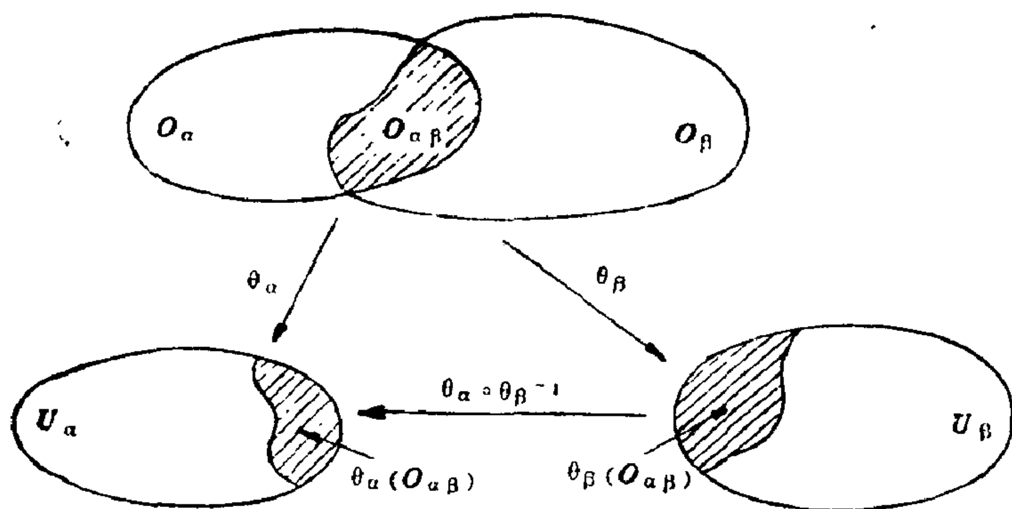


图 4.1

$\mathscr{B}$ 的元$(U_\alpha,\ \theta_\alpha,\ O_\alpha)$或 O_α 叫做M的**坐标邻域**。对于 O_α 内的任意点P，设点 $\theta_\alpha(P)\in U_\alpha(\subset R^n)$的坐标为$(x^1,\cdots,x^n)$ 时，n个数的组$(x^1,\cdots,x^n)$与 O_α 的各点P成一一对应，此 $(x^1,\cdots,x^n)$ 叫做点P在O_α 的坐标。这时就说坐标邻域 O_α 内的坐标系是$(x^1,\cdots,x^n)$。设坐标邻域 O_α 与 O_β 内的坐标系分别为$(x^1,\cdots,x^n)$与$(\bar{x}^1,\cdots,\bar{x}^n)$。当$O_{\alpha\beta}=O_\alpha\cap O_\beta\neq\varnothing$，$O_{\alpha\beta}$ 的各点P在 O_α 与 O_β 的坐标分别为 $(x^1,\cdots,x^n)$ 与$(\bar{x}^1,\cdots,\bar{x}^n)$时，则各个 $\bar{x}^h$ 是$(x^1,\cdots,x^n)$的 C^∞ 函数，写做

$$\bar{x}^h=\bar{x}^h(x^1,\cdots,x^n),\quad (h=1,\cdots,n) \qquad (17.2)$$

此方程 (17.2) 表示映射 $\theta_\beta\circ\theta_\alpha^{-1}:\theta_\alpha(O_{\alpha\beta})\to\theta_\beta(O_{\alpha\beta})$。此 (17.2) 叫做在 $O_\alpha\cap O_\beta$ 里的**坐标变换**。

设给定流形M的开集O，R^n 的开域U，同胚映射 $\theta:O\to U(\subset R^n)$. 任取$M$的图册 $\mathscr{B}$ 的元 $(U_\alpha,\ \theta_\alpha,\ O_\alpha)$。当 $O_\alpha'=O\cap O_\alpha\neq\varnothing$，$\theta\circ\theta_\alpha^{-1}$: $\theta_\alpha(O_\alpha)\to\theta(O_\alpha')$ 为 C^∞ 映射，即 $\bar{x}^h=\bar{x}^h(x^1,\cdots,x^n)$ 为 C^∞ 函数时，$(U,\ \theta,O)$叫做流形M的**坐标邻域**。但$(x^1,\cdots,x^n)$为 O_α 内的坐标系，$(\bar{x}^1,\ \cdots,\ \bar{x}^n)$是$O$内的坐标系。

有向流形 对于 n 维流形M的图册$\mathscr{B}$ 的任意二坐标邻域O，$\bar{O}$，当在 $O\cap\bar{O}$ 里的坐标变换(17.2)的雅可比行列式满足

$$\frac{\partial(\bar{x}^1,\cdots,\bar{x}^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}>0$$

时，就说图册$\mathscr{B}$**给M一种方向**，又说M**有向**[1]。当M有向时，M有两种方向。

例 17.1 (1) 把 R^n 自己看做它的开集，则 R^n 是以 $\mathscr{B}=\{(R^n, i, R^n)\}$ 为图册的 n 维流形并具有方向，但设映射 $i: R^n \to R^n$ 为恒等映射。这样流形 R^n 叫做 **n 维仿射空间**。

(2) 在例 6.1 可见，3 维欧氏空间 E^3内的球面 S^2为二维流形。同理，$(n+1)$维欧氏空间 E^{n+1} 内的球面

$$S^n=\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\,|\,(x^1)^2+\cdots+(x^{n+1})^2=1\}$$

是 n 维流形。而且 S^n 具有方向。

(3) 在第二章里定义的 E^3 内的简单曲面（在第二、第三章里简称之为曲面）是二维流形。

例 17.2 射影平面 对于$M=R^3-\{(0,0,0)\}$内的两点(x^1, x^2, x^3)与(y^1, y^2, y^3)，如果$y^1=kx^1, y^2=kx^2, y^3=kx^3$，$(k\neq 0)$成立时，定义$(x^1, x^2, x^3)\sim(y^1, y^2, y^3)$，则在$M$内，$\sim$是一种等价关系。用这种等价关系$\sim$将$M$分类而得的等价类全体的集 $P^2=M/\sim$ 叫做**射影平面**。包含M的点P的等价类以$[P]$表示，设在对应 $P\mapsto[P]$下决定的映射为 $\pi: M\to P^2$。对于 P^2 的子集G，当 $\pi^{-1}(G)$为 R^3 的开集时，定义G为 P^2 的开集，这样就在 P^2 里引进拓扑。以下证明 P^2 为二维流形。在 P^2 内考虑由以下三个开集作成的复盖。

$$O_1=\{[(x^1, x^2, x^3)]\,|\,x^1\neq 0\}$$
$$O_2=\{[(x^1, x^2, x^3)]\,|\,x^2\neq 0\}$$
$$O_3=\{[(x^1, x^2, x^3)]\,|\,x^3\neq 0\}$$

同胚 $\theta_\alpha: O_\alpha\to R^2$ 分别定义如下。

$$\theta_1([(x^1, x^2, x^3)])=\left(\frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1}\right)$$
$$\theta_2([(x^1, x^2, x^3)])=\left(\frac{x^1}{x^2}, \frac{x^3}{x^2}\right)$$
$$\theta_3([(x^1, x^2, x^3)])=\left(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3}\right)$$

---

1) 也说可定向或定向。（译者注）

今设在 O_1, O_2, O_3 的坐标分别为(u^1,u^2), $(\bar{u}^1,\bar{u}^2)$,$(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$, 则在 $O_1\cap O_2$, $O_2\cap O_3$, $O_3\cap O_1$ 里的坐标变换分别为

$$\begin{cases}\bar{u}^1=\dfrac{1}{u^1}\\ \bar{u}^2=\dfrac{u^2}{u^1}\end{cases}\qquad \begin{cases}\tilde{u}^1=\dfrac{\bar{u}^1}{\bar{u}^2}\\ \tilde{u}^2=\dfrac{1}{\bar{u}^2}\end{cases}\qquad \begin{cases}u^1=\dfrac{\tilde{u}^2}{\tilde{u}^1}\\ u^2=\dfrac{1}{\tilde{u}^2}\end{cases}$$

故 P^2 为二维流形。

考虑以原点为中心的球面 $S^2\subset R^3-\{(0, 0, 0)\}$。将$\pi$限制在 S^2 上，则得 $\pi: S^2\to P^2$，此映射为从 S^2 到 P^2 上的连续映射。因 S^2 紧致，故 P^2 也紧致。

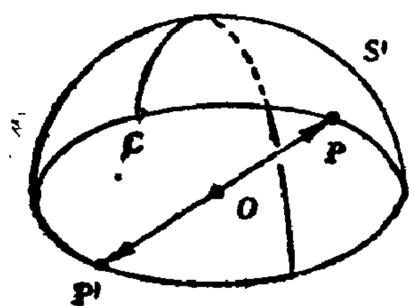


图 4.2

参考 $\pi: S^2\to P^2$,可作 P^2 如下。即考虑 S^2 的半球面 S'，其边界线C为大圆。如图4.2所示,以球面 S^2的中心为O,将边界线C上的任意点P与其对径点 P' 等同起来，就能做出 P^2。 但不能把 P^2 画成 E^3 内的曲面。

射影空间 与射影平面 P^2 完全相同，定义 n **维射影空间** $P^n(n\geqq 2)$，则 P^n 为 n 维流形，而且是紧致的。当 n 为奇数时，P^n 有方向，可是当 n 为偶数时，P^n 没有方向.

《**注意**》圆 S^1 为一维流形。人们知道一维流形本质上只有 S^1与 R。当然，S^1 是紧致的，R不是紧致的。

例 17.3 环面 在乘积集 $T^2=S^1\times S^1$ 里导入乘积拓扑，T^2 就成为拓扑空间. 考虑在习题四之 12(p. 152)所作圆 S^1 的开复盖 O^1, O^2, O^3，作出 T^2 的开复盖共由九个开集而成。

$G_1=O_1\times O_1$, $G_2=O_1\times O_2$, $G_3=O_1\times O_3$, $G_4=O_2\times O_1$

$G_5=O_2\times O_2$, $G_6=O_2\times O_3$, $G_7=O_3\times O_1$, $G_8=O_3\times O_2$

$G_9=O_3\times O_3$.

其次分别用

$$\psi_1((P,Q))=(\theta_1(P),\ \theta_1(Q)),\ ((P,Q)\in G_1)$$

$$\psi_2((P,Q))=(\theta_1(P),\ \theta_2(Q)),\ ((P,Q)\in G_2)$$

$$\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots$$

$$\psi_9((P,Q))=(\theta_3(P),\ \theta_3(Q)),\ ((P,Q)\in G_9)$$

定义 9 个同胚映射

$$\psi_1:G_1\to I_1\times I_1,\ \psi_2:G_2\to I_1\times I_2,\ \cdots,\ \psi_9:G_9\to I_3\times I_3$$

则$(I_1\times I_1,\ \psi_1,\ G_1)$，$(I_1\times I_2,\ \psi_2,\ G_2)$，…，$(I_3\times I_3,\ \psi_9,\ G_9)$形成 T^2 的图册 $\mathscr{B}$，能够证实 T^2 为二维流形。此流形 T^2 叫做二维**环面**。同理，n 个圆 S^1 的乘积空间 $T^n=S^1\times S^1\times\cdots\times S^1$ 为 n 维流形。因圆 S^1 是紧致的，故 T^n 也是紧致的。此外，T^n 有向。

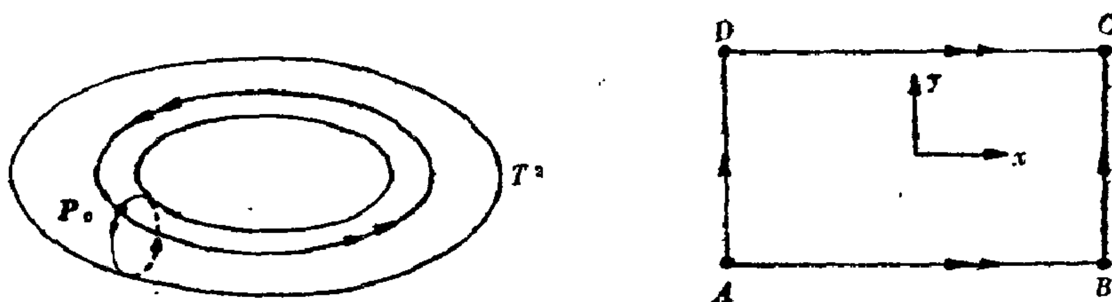


图 4.3

图 4.3 右侧矩形的二边 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 包括其方向等同视之，可得如左侧的闭曲面。这就是 T^2

例 17.4 克莱茵面 与作 T^2的方法相同，可做出二维流形。在图 4.4 的矩形里，二边 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 包括方向在内等同视之可得克莱茵面 S。此面 S 没有方向。不能画成 E^3 里的曲面。

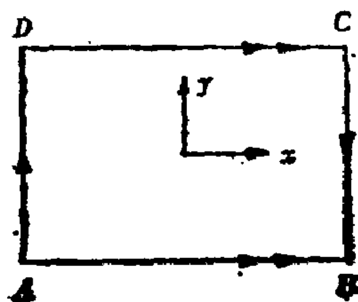


图 4.4

开子流形 考虑 n维流形M的开子集 G，在G里从M的拓扑导入相对拓扑，使 G 为拓扑空间。设 $\mathscr{B}=\{(U_\alpha,\ \theta_\alpha,\ O_\alpha)\,|\,\alpha\in A\}$ 为M的图册，令 $O_\alpha'=O_\alpha\cap G$，θ_α 在 O_α' 上的限制为 θ_α'，则 $\mathscr{B}'=\{(U_\alpha',\ \theta_\alpha',\ O_\alpha'\,|\,\alpha\in A\}$为 G 的图册，可见G为 n 维流形。但设 $U_\alpha'=\theta_\alpha(O_\alpha')$。此流形$G$叫做流形$M$的**开子流形**。例如从仿射空间 R^n，球面 S^2，环面 T^2 等去掉闭

集（例如有限个点）便得新的流形。

C^∞ 函数　设给定流形M上的连续函数 $f:M\to R$。当取M的图册$\mathscr{S}$的任意元$(U_\alpha, \theta_\alpha, O_\alpha)$时，设$(x^1,\cdots,x^n)$为 O_α 内的坐标系，则$f\circ\theta_\alpha^{-1}:U_\alpha\to R$ 是 n 变数 $(x^1,\cdots,x^n)$的函数。当此函数 $f\circ\theta_\alpha^{-1}$ 为 C^∞ 函数 时，给定的$f:M\to R$叫做M上的 **C^∞ 函数**。函数 $f\circ\theta_\alpha^{-1}$ 叫做f在O_α 的局部表示，在无混淆可能的情况下，将 $f\circ\theta_\alpha^{-1}$ 记做 $f(x^1,\cdots,x^n)$ 或 f。

切向量　对于M上的 C^∞ 函数 f，按如下方式对应以实数 Af，这样映射叫做 n 维流形上一点P处的**切向量**A[1]：取包含P的坐标邻域(U,θ, O) （即 $P\in O$），对于A决定 n 个数的列$(A^1,\cdots,A^n)$使得

$$Af=A^i\left(\frac{\partial f\circ\theta^{-1}}{\partial x^i}\right)_{\theta(P)} \tag{17.3}$$

成立，式中$(x^1,\cdots,x^n)$为在O里的坐标系。(17.3)的右边简写之为

$$Af=A^i\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_P \tag{17.4}$$

这时，$(A^1,\cdots,A^n)$叫做切向量A在坐标邻域O的**分量**。此外，在本章以后，将§13(p.87) 所述简略写法用于 n 维的情况下。

在包含点P的其他坐标邻域$\overline{O}$里设切向量A的分量为 $(\overline{A}^1,\cdots,\overline{A}^n)$，

则
$$\overline{A}^h=\left(\frac{\partial\overline{x}^h}{\partial x^i}\right)_P A^i \tag{17.5}$$

式中 $(\overline{x}^1,\cdots,\overline{x}^n)$为在 $\overline{O}$ 里的坐标系。(17.5)叫做**向量的变换式**。

【问题 17.1】 试证向量的变换式(17.5)。

在点P处 n 个切向量$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_P$ $(i=1,\cdots,n)$的定义是

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)f=\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_P \tag{17.6}$$

式中 f 是任意 C^∞函数.即这些切向量$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_P,\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_P,\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_P$在

1） 在本书中二维空间中的向量用黑斜体，$n(>3)$维时用斜体。（译者注）

坐标邻域O里分别具有分量(1, 0, …,0), (0, 1, 0, …, 0), …, (0, …, 0, 1)。

对于点P处的切向量A，下式成立：设f与g为任意的 C^∞ 函数，k为任意的常数时

$$A(f+g)=Af+Ag,\quad A(kf)=kAf$$
$$A(fg)=(Af)g(P)+f(P)(Ag) \qquad (17.7)$$

即，切向量A是作用在 C^∞ 函数的微分算子。

对于M的点P处的切向量A, B与常数 k, A与B之**和**以及A的 k **倍**分别定义如下：设f为任意 C^∞ 函数，

$$(A+B)f=Af+Bf,\quad (kA)f=k(Af)$$

这时，在坐标邻域O处设A与B的分量分别为 $(A^1,\cdots,A^n)$与 $(B^1,\cdots,B^n)$,则 $A+B$及 kA 的分量分别为$(A^1+B^1,\cdots,A^n+B^n)$与$(kA^1,\cdots,kA^n)$。除此之外，显然

$$A=A^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_P$$

成立。综合以上讨论可见下列事实成立：设在点P处的切向量全体的集为$T_P(M)$，它是n维（R上的）向量空间。$T_P(M)$叫做M在点P的**切空间**。这时，n个切向量$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_P, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_P$形成 $T_P(M)$ 的基底。

曲线与切向量　与§7 所述曲面上的曲线的定义相同，流形M上的曲线以连续映射 $c:I\to M$定义(I为某区间)。C^∞曲线，正则曲线以及曲线的局部表示与§7 一样来定义。如不特殊声明，只说曲线，指的是 C^∞ 曲线。

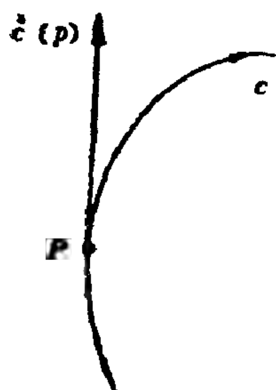
设曲线 $c:I\to M$上一点$P=c(t_0)$包含于坐标邻域O内，c在O内的局部表示为

$$x^h=x^h(t)$$

时，以

$$A^h=\left(\frac{dx^h}{dt}\right)_{t_0}$$

为分量在点P处的切向量A叫做**曲线 c 在点P的切向量**，以$\dot{c}(P$表)示。即



$$\dot{c}(p)=\left(\frac{dx^h}{dt}\right)_{t_0}\left(\frac{\partial}{\partial x^h}\right)_P$$

这时，对于任意 C^∞ 函数 f

$$\dot{c}(p)f=\left(\frac{df\circ c}{dt}\right)_{t_0}$$

成立。

图 4.5

向量场 与§7 的定义一样，流形M上的向量场X的定义是：M的各点P与P处的切向量 X_P 的一种对应。在坐标邻域O内X的分量也同样地定义。当然X的分量是n个（定义在O内的)C^∞ 函数之组$(X^1,\cdots,X^n)$.使用在O内定义的n个向量场

$$\frac{\partial}{\partial x^i}:P\mapsto\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_P,\qquad (P\in O)$$

在O内可将X唯一地表示为

$$X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\tag{17.8}$$

称之为**向量场X在坐标邻域O内的局部表示**。向量之和，函数与向量场之积也与§7 一样定义。

设M上的向量场X在坐标邻域O与$\overline{O}$ 的分量分别为 $(X^1,\cdots,X^n)$ 与$(\overline{X}^1,\cdots,\overline{X}^n)$，则在 $O\cap\overline{O}$ 里

$$\overline{X}^h=\frac{\partial\overline{x}^h}{\partial x^i}X^i\tag{17.9}$$

成立，式中$\overline{x}^h=\overline{x}^h(x^1,\cdots,x^n)$是在 $O\cap\overline{O}$ 里的坐标变换式 (17.2)。（参照(17.5))。上列(17.9)叫做**向量的变换式**。

对于M上的任意 C^∞ 函数 f，由对应 $Xf:P\mapsto X_Pf(P\in M)$定义的函数用 Xf 表示. 此 Xf 是 C^∞函数。由(17.7) 可见，下式成立：对于任意的 C^∞ 函数 f，g 与常数 k，

$$X(f+g)=Xf+Xg,\ X(kf)=kXf$$
$$X(fg)=(Xf)g+f(Xg) \tag{17.10}$$
对于任意向量场X，Y与任意 C^∞ 函数 h,
$$(X+Y)f=Xf+Yf,\ (hX)f=h(Xf)$$
但 f 为任意 C^∞ 函数.

对于流形M上的二任意向量场X,Y,能够定义新向量场$[X, Y]$
$$[X,Y]f=X(Yf)-Y(Xf) \tag{17.11}$$
但式中的f为任意 C^∞ 函数。此$[X, Y]$叫做X与Y的**括弧积**。

【问题 17.2】 试证上面定义的$[X, Y]$满足(17.10)。

【问题 17.3】 设在坐标邻域O里，X与Y的分量分别为 $(X^1,\cdots,X^n)$与$(Y^1,\cdots,Y^n)$，则其括弧积在O里的分量是
$$X^i\frac{\partial Y^h}{\partial x^i}-Y^i\frac{\partial X^h}{\partial x^i},\ (h=1,\ \cdots,\ n)$$
试证明之。

§18 黎曼空间

黎曼度量 在流形M的各点P的切空间 $T_P(M)$ 里，假设定义了内积$(\ ,\ )_P$.对于M上的任何向量场 X，Y，以 $P\mapsto(X_P,\ Y_P)_P$ 定义的M上的函数$(X,\ Y)$是 C^∞ 函数时， 在各点以内积对应之这样对应$(\ ,\ ):P\mapsto(\ ,\ )_P$ 叫做**黎曼度量**。显然
$$(X,\ Y)=(Y,\ X)$$
$$(X+Z,\ Y)=(X,\ Y)+(Z,\ Y),\ (fX,\ Y)=f(X,\ Y) \tag{18.1}$$
以及
$$(X,\ X)\geqq 0;\ (X,\ X)=0\Longleftrightarrow X=0 \tag{18.2}$$
对于任意向量场X，Y，Z与任意 C^∞ 函数f成立。

黎曼度量$(\ ,\ )$以 $g(\ ,\ )$记之，有时也写做
$$g(X,\ Y)=(X,\ Y)$$

此时，这种黎曼度量以符号 g 记之。

任意取向量场 X 与 Y，设在坐标邻域 O 里的分量分别为 $(X^1,\cdots,X^n)$ 与 $(Y^1,\cdots,Y^n)$，则在 O 里 C^∞ 函数 (X,Y) 可用

$$(X,Y)=g_{ji}X^jY^i,\ g_{ji}=\left(\frac{\partial}{\partial x^j},\ \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \tag{18.3}$$

表示，g_{ji} 是定义在 O 里的 C^∞ 函数。在坐标邻域 O 的各点，(n,n) 矩阵 (g_{ji}) 是对称正定矩阵。此 (g_{ji}) 叫做黎曼度量在坐标邻域 O 里的**分量**。

【问题 18.1】 试证上列(18.3)。

【问题 18.2】 运用(18.1)与(18.2)，试证在坐标邻域 O 的各点，(g_{ji}) 为对称的正定矩阵。

n 维流形 M 与其上定义的黎曼度量 g 的组 (M,g) 叫做 **n 维黎曼空间**。在没有含混的可能时常常把 (M,g) 说成黎曼空间 M。

在流形 M 上给定黎曼度量 g，在坐标系 O 与 $\overline{O}$ 里设其分量分别为 (g_{ji}) 与 $(\overline{g}_{ji})$，则在 $O\cap\overline{O}$ 里变换式

$$\overline{g}_{ji}=\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j}\ \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i}g_{qp} \tag{18.4}$$

成立。

【问题 18.3】 运用§17 的(17.9)，试证(18.4)。

例 18.1 在三维欧氏空间 E^3 里的简单曲面 S 上的内积(,)是一种黎曼度量 g。故可将简单曲面 S 看做二维黎曼空间 $(S,\ g)$。这时，g 在各坐标邻域 O 里的分量是曲面 S 在 O 里的第一基本量。

与曲面的情况一样，在黎曼空间 $(M,\ g)$ 的各坐标邻域 O 里，把

$$ds^2=g_{ji}dx^jdx^i$$

叫做它的**线素**。如所周知下列基本定理成立。

定理 4.1 在任意流形 M 上，总是存在黎曼度量。

〈证明〉 从略（运用 M 满足第二可数公理）。

例 18.2 (1) 在 n 维仿射空间 R^n 里可定义黎曼度量 g 使其线素表示成

$$ds^2=(dx^1)^2+\cdots+(dx^n)^2 \tag{18.5}$$

这样的黎曼空间$(R^n,\ g)$叫做 n **维欧氏空间**，以符号 E^n 记之。

(2) 在 R^3 的开球 $D=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2+z^2<1\}$ 内，考虑以线素

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{\{1-(x^2+y^2+z^2)\}^2},\ (x,\ y,\ z)\in D \tag{18.6}$$

定义的黎曼度量 g，能够作成三维黎曼空间(D,g)。

(3) 在例 17.3 定义的环面 T^2 上，各坐标邻域间的坐标变换是恒等变换或平行移动。因此，在各坐标邻域里取适当的坐标系$(x,\ y)$，则在 T^2 上存在线素为

$$ds^2=dx^2+dy^2 \tag{18.7}$$

的黎曼度量 g。

(4) 在例 17.4 定义的克莱茵面上可定义黎曼度量 g 使得线素与上述(18.7)一样。

在黎曼空间(M,g)里，设X与Y为任意向量场（或在一点处的切向量），定义X之**长**（或**模**）为

$$\|X\|=\sqrt{(X,X)}.$$

定义X与Y的**夹角** θ 为

$$\cos\theta=\frac{(X,\ Y)}{\|X\|\|Y\|},\ (0\leqslant\theta<\pi)$$

但设到处$\|X\|\neq0$，$\|Y\|\neq0$。

黎曼空间M上的 C^∞ 曲线 $c:I\to M$ $(I=[a,\ b])$之**长**定义成

$$L(c)=\int_a^b\|\dot{c}\|dt \tag{18.8}$$

如果 $c(I)$ 包含在一个坐标邻域O里时，则得

$$L(c)=\int_a^b\sqrt{g_{ji}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt}}\,dt \tag{18.9}$$

但设 c 在O里的局部表现为 $x^h=x^h(t)$。

其次，任取 $t(\in I)$，以下式定义函数 $s=s(t)$。

$$s=s(t)=\int_a^t \|\dot{c}\|dt$$

此 s 可用做曲线 c 的参数。此参数 s 叫做曲线 c 的**弧长**。

§ 19 张　　量

设 n 维流形 M 的一图册为 $\mathscr{B}$。对于 $\mathscr{B}$ 的各元 O，给定了在 O 内定义的 n^3 个 C^∞ 函数 $T_{ji}{}^h$ $(h,i,j=1,\cdots,n)$。考虑 O 与 $T_{ji}{}^h$ 的组 $(O, T_{ji}{}^h)$ 全体之集 T。对于 $\mathscr{B}$ 的任意两个元 O，$\overline{O}$，取 T 的两个元 $(O,T_{ji}{}^h)$ 与 $(\overline{O}, \overline{T}_{ji}{}^h)$，如果 $O\cap\overline{O}=\varnothing$，设在 $O\cap\overline{O}$ 里

$$\overline{T}_{ji}{}^h=\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^j}\ \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^i}\ \frac{\partial \overline{x}^h}{\partial x^p}T_{rq}{}^p \tag{19.1}$$

成立。式中设 $(x^1,\cdots,x^n)$ 与 $(\overline{x}^1,\cdots,\overline{x}^n)$ 分别为在 O 与 $\overline{O}$ 里的坐标系。这时说，$T=\{(O,T_{ji}{}^h)\,|\,O\in\mathscr{B}\}$ 定义一个 **(1,2) 阶张量场** T。又 $T_{ji}{}^h$ 叫做此 (1,2) 阶张量场 T 在坐标邻域 O 的**分量**。

完全一样，可以定义 (1,0) 阶，(0,1) 阶，(1,1) 阶，…，(p,q) 阶，…张量场。

当有必要统一用语时，有时把 C^∞ 函数说成 (0,0) 阶张量场。由 (17.9) 可见，向量场是 (1,0) 阶张量场。又由 (18.4) 可见，

黎曼度量定义一个（0，2）阶张量场 g。此张量场 g 叫做**度量张量**。

有时把 (p,q) 阶张量场叫做**反变 p 阶，共变 q 阶张量场**，$(p,0)$ 阶张量场叫做**反变 p 阶张量场**，$(0,q)$ 阶张量场叫做**共变 q 阶张量场**。

例 19.1　给定流形 M 上的 C^∞ 函数 f，则在各坐标邻域里存在分量为 $(\partial f/\partial x^1,\cdots,\partial f/\partial x^n)$ 的 (0,1) 阶张量场 df。此 df 叫做 C^∞ 函数 f 的**微分**或**梯度**。

【问题 19.1】　试证上例 19.1。

例 19.2 在任意流形M的各坐标邻域里，存在分量为$I_i{}^h$

$$I_i{}^h=\delta_i^h=\begin{cases}1, & (h=i)\\ 0 & (h\neq i)\end{cases}$$

的(1,1)阶张量场。试证明之。

〈**解答**〉 取M的二坐标邻域O与$\overline{O}$，设$O\cap\overline{O}\neq\varnothing$.这时，在$O\cap\overline{O}$里

$$\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial \overline{x}^h}{\partial x^p}I_q{}^p=\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial \overline{x}^h}{\partial x^p}\delta_q^p=\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial \overline{x}^h}{\partial x^p}=\delta_i^h$$

$$\therefore\quad \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial \overline{x}^h}{\partial x^p}I_q{}^p=\overline{I}_i^h$$

即在M上存在所求的(1,1)阶张量场。（证毕）

在例 19.2 里讨论的(1,1)阶张量场叫做**单位张量场**,以I记之。从例 19.2 可见,

在任意流形M上，存在单位张量场I。

例 19.3 设黎曼空间(M,g)的度量张量在各坐标邻域O里的分量为g_{ji}。设矩阵(g_{ji})的逆矩阵为(g^{ji}),则在M的各O里存在以g^{ji}为分量的(2,0)阶张量场G。试证明之。此g^{ji}叫做**黎曼度量**g在坐标邻域O里**的反变分量**。

〈**解答**〉 与第二章(8.23)的证明一样。

例 19.4 如果E^3里的简单闭曲面S有向,其第二基本量H_{ji}决定S上的(0,2)阶张量场H，$H_j{}^h=H_{ji}g^{ih}$决定(1,1)阶张量场L。试证明之。这时，H与L分别叫做**第二基本张量**，**温加顿张量**。

〈**解答**〉 因S有向，故在(9.18)里可设$\partial(\overline{u},\overline{v})/\partial(u,v)>0$。因此，$H_{ji}$决定第二基本张量$H$。其次,由(9.10)与(9.18)可见，$H_j{}^h$决定温加顿张量。（证毕）

张量场之和 考虑两个(1,2)阶张量场T,S，设在各坐标邻域O里的分量分别为$T_{ji}{}^h$与$S_{ji}{}^h$。这时，在O里存在以

$$W_{ji}{}^h=T_{ji}{}^h+S_{ji}{}^h$$

为分量的(1，2)阶张量场W。这个W叫做T与S的**和**。用下式表示。

$$W=T+S$$

同理可定义两个(p,q)阶张量场T与S之和$T+S$，这是(p,q)阶张量场。这时

$$T+S=S+T$$

成立。同理可定义三个以上(p,q)阶张量场T，S，…，U之和$T+S+\cdots+U$。

函数与张量之积 设T为(1，2)阶张量场，在各坐标邻域O里T的分量为$T_{ji}{}^{h}$。又设f为C^∞函数，则在O里存在以

$$W_{ji}{}^{h}=fT_{ji}{}^{h}$$

为分量的(1,2)阶张量场W。这个W叫做T的f**倍**，用

$$W=fT$$

表示。

一般，同理可定义(p,q)阶张量场T与C^∞函数f的**积**fT。下列定律成立：设f与g为任意C^∞函数，T与S为任意(p,q)阶张量场，则

$$f(gT)=(fg)T,\quad (f+g)T=fT+gT,\quad f(T+S)=fT+fS$$

零张量 在所有的坐标邻域O里，存在分量全是0的(p,q)阶张量场，叫做(p,q)**阶零张量**，以0记之。下列定律成立：设T为任意(p,q)阶张量场，则

$$T+0=0+T=T$$

张量积 给定(1,2)阶张量场T与(1,1)阶张量场S，在各坐标邻域O里，设其分量分别为$T_{ji}{}^{h}$与$S_{q}{}^{p}$。这时，在各坐标邻域O里，存在以

$$W_{jiq}{}^{hp}=T_{ji}{}^{h}S_{q}{}^{p}$$

为分量的(2，3)阶张量场W。此W叫做T与S的**张量积**，用下列符号表示。

$$W=T\otimes S$$

一般地说，同理可定义(p,q)阶张量场T与(r,s)阶张量场S的张量

积W，W是$(p+r,q+s)$阶张量场。下列定律成立：对于任意C^∞函数f，任意(p,q)阶张量场T与S，任意(r,s)阶张量场U，

$$(fT)\otimes U=f(T\otimes U),\qquad T\otimes(fU)=f(T\otimes U)$$

$$(T+S)\otimes U=T\otimes U+S\otimes U,\quad U\otimes(T+S)=U\otimes T+U\otimes S$$

但一般地说$T\otimes U\neq U\otimes T$。对于三个张量场$T$，$S$，$U$可将$(T\otimes S)\otimes U$与$T\otimes(S\otimes U)$等同之，以$T\otimes S\otimes U$表示之。四个以上张量场的张量积也一样。

缩短　设(2,3)阶张量场T在各坐标邻域的分量为$T_{lkj}{}^{ih}$。在各坐标领域O里，存在以

$$W_{kj}{}^h=T_{lkj}{}^{lh}$$

为分量的(1，2)阶张量场W。原因是，在$O\cap\overline{O}$里可以作以下计算。

$$\overline{W}_{kj}{}^h=\overline{T}_{lkj}{}^{lh}=\frac{\partial x^t}{\partial\overline{x}^l}\frac{\partial x^s}{\partial\overline{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial\overline{x}^j}\frac{\partial\overline{x}^l}{\partial x^q}\frac{\partial\overline{x}^h}{\partial x^p}T_{tsr}{}^{qp}$$

$$=\frac{\partial x^s}{\partial\overline{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial\overline{x}^j}\frac{\partial\overline{x}^h}{\partial x^p}\left(\frac{\partial x^t}{\partial\overline{x}^l}\frac{\partial\overline{x}^l}{\partial x^q}\right)T_{tsr}{}^{qp}$$

$$=\frac{\partial x^s}{\partial\overline{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial\overline{x}^j}\frac{\partial\overline{x}^h}{\partial x^p}\delta_q^t T_{tsr}{}^{qp}$$

$$=\frac{\partial x^s}{\partial\overline{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial\overline{x}^j}\frac{\partial\overline{x}^h}{\partial x^p}T_{tsr}{}^{tp}$$

$$\therefore\quad\overline{W}_{kj}{}^h=\frac{\partial x^s}{\partial\overline{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial\overline{x}^j}\frac{\partial\overline{x}^h}{\partial x^p}W_{sr}{}^p$$

此W叫做T（即$T_{lkj}{}^{ih}$）关于指标i与l的**缩短**。张量场T的缩短方式有种种，如

$$T_{lkj}{}^{il},\ T_{lkj}{}^{kh},\ \cdots,\ T_{lkj}{}^{ij}$$

等。

一般地说，同理可定义(p,q)阶张量场$(p,q\geqslant1)$的缩短，其结果是$(p-1,q-1)$阶张量场。

特别设(1,1)阶张量场T的分量为$T_i{}^h$，缩短之得下列C^∞函数f。

$$f = T_i{}^i$$

余向量场 (0,1)阶张量场 w 叫做**余向量场**。给定向量场X时，作(1,1)阶张量场 $w\otimes X$，经缩短而得到的 C^∞ 函数以 $w(X)$表示，叫做X与 w 的**内积**。在坐标邻域O里，设 w 与X的分量分别为 $(w_1, \cdots, w_n)$与$(X^1, \cdots, X^n)$，在O内下式成立。

$$w(X) = w_i X^i = (w_1, \cdots, w_n)\begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}$$

【问题 19.2】 对于向量场X与 C^∞ 函数 f，设 f 的微分为df(参照例 19.1)，则对于任意向量场X，试证下式成立。

$$df(X) = Xf$$

对于坐标邻域O内的点P，以P的第 h 个坐标 x^h 对应之而定义的函数在O内是 C^∞ 函数。此函数以 x^h 表示，其微分 dx^h 是在O内定义的余向量场。在O内定义的余向量场 $dx^1, dx^2, \cdots, dx^n$ 的分量分别为$(1,0,\cdots,0)$, $(0,1, 0,\cdots, 0)$, $\cdots$, $(0, \cdots, 0, 1)$。设M上任意余向量场 w 在坐标邻域O里的分量为$(w_1, \cdots, w_n)$，则在O内得

$$w = w_i dx^i \qquad (19.2)$$

把它叫做 w 在坐标邻域O的**局部表示**。

特别是 C^∞ 函数 f 的微分 df 的局部表示是

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i$$

【问题 19.3】 设向量场X与余向量场 w 在坐标邻域O的分量分别为$(X^1, \cdots, X^n)$与$(w_1, \cdots, w_n)$，试证下列各式成立。

(1) $$dx^h\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \delta_i^h$$

(2) $$X^h = dx^h(X)$$

(3) $$w_i = w\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

在坐标邻域O里，固定指标 h，i，j，则在O里

$$dx^j \otimes dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^h}$$

是一个(1，2)阶张量场．任取M上的(1，2)阶张量场T，设其分量在O内是$T_{ji}{}^h$，则在O里

$$T = T_{ji}{}^h dx^j \otimes dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^h} \tag{19.3}$$

成立。此式叫做张量场T在O的**局部表示**。对于任意（p，q）阶张量场，可作出同样的局部表示。

共变张量场　设U为M上的共变三阶张量场，在各坐标邻域O里的分量为U_{jih}。取任意向量场X，Y，Z，考虑M上的 C^∞ 函数

$$U(X,\ Y,\ Z) = U_{jih} X^j Y^i Z^h \tag{19.4}$$

式中X^h，Y^i，Z^j 分别为X，Y，Z在坐标邻域O里的分量。

此外，设f为任意的 C^∞ 函数，W为任意向量场，则下列各式成立。

$$U(fX,\ Y,\ Z) = U(X,\ fY,\ Z) = U(X,\ Y,\ fZ) = fU(X,\ Y,\ Z)$$

$$\begin{aligned} &U(X+W,\ Y,\ Z) = U(X,\ Y,\ Z) + U(W,\ Y,\ Z) \\ &U(X,\ Y+W,\ Z) = UX,\ Y,\ Z) + U(X,\ W,\ Z) \\ &U(X,\ Y,\ Z+W) = U(X,\ Y,\ Z) + U(X,\ Y,\ W) \end{aligned} \tag{19.5}$$

反之，如果存在满足(19.5)的对应 U：$(X,\ Y,\ Z) \mapsto U(X,Y,Z)$，则$U$定义一个共变三阶张量场。

【问题 19.4】　试证下式。

$$(dx^j \otimes dx^i \otimes dx^h)\left(\frac{\partial}{\partial x^r},\ \frac{\partial}{\partial x^q},\ \frac{\partial}{\partial x^p}\right) = \delta^j_r \delta^i_q \delta^h_p$$

【问题 19.5】　对共变三阶张量场U，试证在坐标邻域O内

$$U_{jih} = U\left(\frac{\partial}{\partial x^j},\ \frac{\partial}{\partial x^i},\ \frac{\partial}{\partial x^h}\right)$$

为张量U的分量（运用〔问题 19.4〕）．

以上所述事实，对于一般的共变 q 阶张量场($q>0$)照样成立。

(1, q)阶张量场 在流形M上，考虑(1, 2)阶张量场T，设其分量在各坐标邻域O内是 $T_{ji}{}^h$。取任意向量场X与Y，设其分量在O内分别为X^h 与 Y^h。可以证明在M上存在以各坐标邻域内的

$$T(X, Y)=(T_{ji}{}^h X^j Y^i)\frac{\partial}{\partial x^h} \qquad (19.6)$$

为局部表示的向量场。这时以下定律成立：设 f 为任意 C^∞ 函数，X，Y，Z 为任意向量场，则

$$\begin{aligned} T(fX, Y)&=T(X, fY)=fT(X, Y)\\ T(X+Z, Y)&=T(X, Y)+T(Z, Y) \qquad (19.7)\\ T(X, Y+Z)&=T(X, Y)+T(X, Z)\end{aligned}$$

反之，如果有满足(19.7)的对应T：$(X, Y)\mapsto T(X, Y)$，则此对应定义一个(1, 2)阶张量场。

【问题 19.6】 试证下式。

$$\left(dx^j\otimes dx^i\otimes\frac{\partial}{\partial x^h}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^q}, \frac{\partial}{\partial x^p}\right)=\delta^j_q\delta^i_p\frac{\partial}{\partial x^h}$$

【问题 19.7】 设(1, 2) 阶张量场T在各坐标邻域O里的分量为$T_{ji}{}^h$，试证在O里

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)=T_{ji}{}^h\frac{\partial}{\partial x^h}$$

成立。

一般地说，对于(1, q)阶张量场 T($q>0$)上列事实也成立。

《**注意**》对于向量场X，Y的括弧积$[X, Y]$与任意 C^∞ 函数f，

$$[fX, Y]=f[X, Y]-(Yf)X$$

成立，故对应$[X, Y]$：$(X, Y)\mapsto[X, Y]$不定义张量场。

对称性 反称性 设U为共变三阶张量场。设 X，Y，Z 为任意向量场。

$U(X, Y, Z)=U(Y, X, Z)$	$U(X, Y, Z)=-U(Y, X, Z)$

用分量来表达与

$U_{jih}=U_{ijh}$	$U_{jih}=-U_{ijh}$

成立等价。这时说，U关于指标 i 与 j

对　称	反　称

其次对共变二阶张量场A来说，A是

对　称	反　称

的充要条件是

$A(X,\ Y)=A(Y,\ X)$	$A(X,\ Y)=-A(Y,\ X)$

而且A的分量 A_{ji} 满足下式。

$A_{ji}=A_{ij}$	$A_{ji}=-A_{ij}$

【问题 19.8】 设共变二阶张量场T的分量为 T_{ji}。试证下列事实。存在以

（1） $A_{ji}=\frac{1}{2}(T_{ji}+T_{ij})$	$B_{ji}=\frac{1}{2}(T_{ji}-T_{ij})$

为分量的共变二阶张量场

A	B
A 是对称	B 是反称

这时，下式成立。

$$T=A+B$$

（2） 将T分解为对称张量场A与反称张量场B之和的方法只有一种。

共变q阶张量场$U(q\geqslant 2)$对于其任意二指标

对　称	反　称

时，则U叫做

对称（共变）张量场	**反称（共变）张量场**

一般地说，对于(1，q)阶张量场以上所述事实也成立。

升标与降标　设黎曼空间$(M,\ g)$的度量张量g在坐标邻域O里的分量为g_{ji}，其反变分量为g^{ji}。取M上的向量场X，设在O里其分量为X^h。能够定义一个余向量场u使得对于任意向量场Y，

$$u(Y)=(X,\ Y) \tag{19.8}$$

成立．此 u 在坐标邻域 O 里的分量 X_i 由

$$X_i=g_{ji}X^j \tag{19.9}$$

而定．又(19.9)的两边乘以 g^{ih}，关于 i 求和，可得

$$X^h=g^{ih}X_i \tag{19.10}$$

这时就说余向量场 u **伴随**于向量场 X，反之，说向量场 X **伴随**于余向量场 u。

【问题 19.9】 根据上述(19.8)可定义余向量场 u.试证明之。

【问题 19.10】 试证上述(19.9)与(19.10)。

设(1，2)阶张量场 T 在各坐标邻域 O 里的分量为 $T_{ji}{}^h$，则在各坐标邻域 O 里分别以

$$T_{jih}=T_{ji}{}^k g_{hk},\quad T_j{}^{ih}=T_{jk}{}^h g^{ki},\quad \cdots,\quad T^{jih}=T_{qp}{}^h g^{qj} g^{pi}$$

为分量的(0，3)阶，(2，1)阶，…，(3，0)阶张量场存在。

一般地说，对于任意(p，q)阶张量场以上所述事实也成立．

§20 微分形式

在流形M上，反称共变张量场 ω 叫做 **p 次微分形式**。例如，余向量场是一次微分形式．为统一用语，C^∞ 函数有时叫做 **0 次微分形式**．流形M上的 p 次微分形式全体的集以 Λ^p 或 $\Lambda^p(M)(p\geqslant 0)$ 表示。

微分形式的局部表示 设 p 次微分形式 ω 在坐标邻域 O 里的分量为 $\omega_{i_1\cdots i_p}$，则在 O 里下式成立

$$\omega=\omega_{i_1\cdots i_p}dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_p} \tag{20.1}$$

因为 ω 是反称共变张量，所以对 p 个字母的置换 σ，

$$\omega_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_p)}=\mathrm{sign}(\sigma)\,\omega_{i_1\cdots i_p}$$

成立。式中$\mathrm{sign}(\sigma)$表示置换 σ 的符号．故改写(20.1)得

$$\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_p}\omega_{i_1\cdots i_p}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p} \tag{20.2}$$

但式中令

$$dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}=\sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sign}(\sigma)dx^{\sigma(i_1)}\otimes\cdots\otimes dx^{\sigma(i_p)}$$

其中 S_p 表示 p 个字母的置换全体所作的群。显然，下列关系成立：设 $\alpha=1,\cdots,p-1$，则

$$\begin{aligned}&dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_\alpha}\wedge dx^{i_{\alpha+1}}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\\&=-dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{\alpha+1}}\wedge dx^{i_\alpha}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\end{aligned}\tag{20.3}$$

故改写(20.2)得

$$\omega=\frac{1}{p!}\omega_{i_1\cdots i_p}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\tag{20.4}$$

设 $\dim M=n$。因为 ω反称，所以

$$\omega_{i_1\cdots i\cdots j\cdots i_p}=-\omega_{i_1\cdots j\cdots i\cdots i_p}$$

成立。故在上式里，令 $i=j$，则$\omega_{i_1\cdots i\cdots i\cdots i_p}=0$。今设 $p>n$，则在 i_1，$\cdots i_p$之中，至少两个相等。故当 $p>n$ 时，$\omega_{i_1\cdots i_p}$ 全是0，结果 $\omega=0$。即当

$\dim M=n$，$p>n$ 时，则 $\Lambda^p(M)=\{0\}$。

$\dim M=n$ 时，则 n 次微分形式 ω 在各坐标邻域O内具有局部表示

$$\omega=fdx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

式中 f 为定义在O里的 C^∞ 函数。

【问题 20.1】 在 n 维流形上，设 n 次微分形式 ω 在坐标邻域O与$\overline{O}$ 里的局部表示分别为

$$\omega=fdx^1\wedge\cdots\wedge dx^n,\qquad\omega=\overline{f}d\overline{x}^1\wedge\cdots\wedge d\overline{x}^n$$

则在 $O\cap\overline{O}$ 里

$$\overline{f}=\det\left(\frac{\partial x^h}{\partial\overline{x}^i}\right)f$$

成立。试证明之。

外积 在坐标邻域O里，定义

$(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p})\wedge(dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q})=dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots$

$\wedge dx^{j_q}$，则由(20.3)可见

$$(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p})\wedge(dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q})$$
$$=(-1)^{pq}(dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q})\wedge(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}) \qquad (20.5)$$

成立。给定 p 次微分形式 w 与 q 次微分形式 π，设在坐标邻域 O 里的局部表示分别为

$$\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_p}\omega_{i_1\cdots i_p}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

$$\pi=\sum_{j_1<\cdots<j_q}\pi_{j_1\cdots j_q}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q}$$

这时，在 O 里定义 $(p+q)$ 次微分形式 $\omega\wedge\pi$ 为

$$w\wedge\pi=\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j_1<\cdots<j_q}\omega_{i_1\cdots i_p}\pi_{j_1\cdots j_q}(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p})\wedge(dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q}) \qquad (20.6)$$

可以证明在各坐标邻域 O 里，由上列(20.6)定义的 $w\wedge\pi$ 在整个 M 上决定 $(p+q)$ 次微分形式。此 $\theta=w\wedge\pi$ 在坐标邻域 O 里的分量可由下式而定。

$$\theta_{i_1\cdots i_{p+q}}=\frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}}\operatorname{sign}(\sigma)\omega_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_p)}\pi_{\sigma(i_{p+1})\cdots\sigma(i_{p+q})} \qquad (20.7)$$

此 $\theta=w\wedge\pi$ 叫做微分形式 ω 与 π 的**外积**。下列关系成立。

$$\omega\wedge\pi=(-1)^{pq}\pi\wedge\omega \qquad (20.8)$$

【问题 20.2】 运用以上(20.5)与(20.6)，试证(20.8)。

对于一次微分形式 ω 与 π，外积 $\omega\wedge\pi$ 的局部表示为

$$\omega\wedge\pi=\omega_j\pi_i dx^j\wedge dx^i$$

$$=\sum_{j<i}(\omega_j\pi_i-\omega_i\pi_j)dx^j\wedge dx^i$$

所以

$$\theta=\omega\wedge\pi \text{ 的分量为 } \theta_{ji}=\omega_j\pi_i-\omega_i\pi_j \qquad (20.9)$$

但式中设 $\omega=\omega_i dx^i$，$\pi=\pi_i dx^i$。这时，下式成立。

$$\omega\wedge\pi=-\pi\wedge\omega,\quad \omega\wedge\omega=0 \tag{20.10}$$

对于一次微分形式 ω 与二次微分形式 π，外积 $\omega\wedge\pi$ 的局部表示为

$$\omega\wedge\pi=\sum_{j<i<h}(\omega_j\pi_{ih}-\omega_i\pi_{jh}-\omega_h\pi_{ij})dx^j\wedge dx^i\wedge dx^h$$

故 $\theta=\omega\wedge\pi$ 的分量为 $\theta_{jih}=\omega_j\pi_{ih}-\omega_i\pi_{jh}-\omega_h\pi_{ij}$

$$=\omega_j\pi_{ih}+\omega_h\pi_{ji}+\omega_i\pi_{hj} \tag{20.11}$$

但式中设 $\omega=\omega_i dx^i$，$\pi=\sum_{j<i}\pi_{ji}dx^j\wedge dx^i$。这时，下式成立。

$$\omega\wedge\pi=\pi\wedge\omega \tag{20.12}$$

【问题 20.3】 对于一次微分形式 $\omega=\omega_i dx^i$ 与 p 次微分形式 $\pi=\sum_{i_1<\cdots<i_p}\pi_{i_1\cdots i_p}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$，试证外积 $\theta=\omega\wedge\pi$ 的分量由下式而定。

$$\theta_{ji_1\cdots i_p}=\omega_j\pi_{i_1\cdots i_p}-\omega_{i_1}\pi_{ji_2\cdots i_p}-\omega_{i_2}\pi_{i_1ji_3\cdots i_p}-\cdots$$

$$-\omega_{i_p}\pi_{i_1\cdots i_{p-1}j} \tag{20.13}$$

对于任意次数的微分形式 ω，π，θ

$$(\omega\wedge\pi)\wedge\theta=\omega\wedge(\pi\wedge\theta)$$

成立。故用 $\omega\wedge\pi\wedge\theta$ 表示。对于四个以上微分形式的外积也用相同符号。

归纳之得：对于外积，下列定律成立：设 f 为任意 C^∞ 函数，ω 与 θ 为任意 p 次微分形式，π 为任意 q 次微分形式，则

$$(f\omega)\wedge\pi=\omega\wedge(f\pi)=f\omega\wedge\pi$$
$$(\omega+\theta)\wedge\pi=\omega\wedge\pi+\theta\wedge\pi \tag{20.14}$$
$$\omega\wedge\pi=(-)^{pq}\pi\wedge\omega$$

外微分 定义映射 d：$\Lambda^p\to\Lambda^{p+1}$ 如下。当 p 次微分形式 ω 在坐标邻域 O 里的局部表示为

$$\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_p}\omega_{i_1\cdots i_p}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

时，在O里$(p+1)$次微分形式 $d\omega$ 的定义是

$$d\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_p} d\omega_{i_1\cdots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{20.15}$$

式中一次微分形式 $d\omega_{i_1\cdots i_p}$ 是定义在O内的 C^∞ 函数 $\omega_{i_1\cdots i_p}$ 的微分。可以证明以（20.15）定义的 $d\omega$ 与其定义中使用的坐标邻域 O 的选法无关，在整个流形M上决定一个$(p+1)$次微分形式。此 $d\omega$ 叫做 ω的**外微分**。当微分形式 ω 满足 $d\omega=0$时，ω 叫做**闭微分形式**。

由（20.9），（20.11），（20.13）可见，下列（20.16），（20.17），（20.18）成立：一次微分形式的外微分 $\theta=d\omega$的分量为

$$\theta_{ji} = \partial_j\omega_i - \partial_i\omega_j \quad (\partial_i = \partial/\partial x^i) \tag{20.16}$$

但设 ω 的分量为 ω_i。

二次微分形式 ω 的外微分 $\theta=d\omega$ 的分量为

$$\begin{aligned}\theta_{jih} &= \partial_j\omega_{ih} - \partial_i\omega_{jh} - \partial_h\omega_{ij} \\ &= \partial_j\omega_{ih} + \partial_i\omega_{hj} + \partial_h\omega_{ji}\end{aligned} \tag{20.17}$$

但设 ω 的分量为 ω_{ji}。

p 次微分形式 ω的外微分 $\theta=d\omega$ 的分量为

$$\begin{aligned}\theta_{ji_1\cdots i_p} = \partial_j\omega_{i_1\cdots i_p} - \partial_{i_1}\omega_{ji_2\cdots i_p} - \partial_{i_2}\omega_{i_1ji_3\cdots i_p} - \cdots \\ - \partial_{i_p}\omega_{i_1\cdots i_{p-1}j}\end{aligned} \tag{20.18}$$

但设 ω 的分量为 $\omega_{i_1\cdots i_p}$。

两次运用(20.18)可证，对于任意微分形式 ω，

$$d^2\omega = d(d\omega) = 0 \tag{20.19}$$

总之，对于算子 d，下式成立。

$$d^2 = 0$$

【问题 20.4】 对于 C^∞ 函数 f，试证下式。

$$d^2 f = d(df) = 0$$

其次设 f 与 g 为 C^∞ 函数，则下式成立。

$$d(fg) = gdf + fdg$$

对于在坐标邻域O里定义的，具有特殊形状的p次微分形式$\omega = fdx^{i_1}\wedge$

$\cdots \wedge dx^{i_p}$ 与 q 次微分形式 $\pi = g dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q}$

$$\omega \wedge \pi = fg(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) \wedge (dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q})$$

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \pi) &= (gdf + fdg) \wedge (dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) \wedge (dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q}) \\ &= (df \wedge (dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p})) \wedge (g dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q}) \\ &\quad + (-1)^p (f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) \wedge (dg \wedge (dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q})) \end{aligned}$$

成立。即得到下列关系：

$$d(\omega \wedge \pi) = d\omega \wedge \pi + (-1)^p \omega \wedge d\pi \qquad (20.20)$$

一般地说，这个关系(20.20)对于流形M上的任意 p 次形式 ω 与 q 次微分形式也成立。

整理之得，对于外微分下列定律成立：对于任意 C^∞ 函数 f，任意 p 次微分形式 ω，θ 以及任意 q次微分形式 π，

$$\begin{aligned} &d(\omega + \theta) = d\omega + d\theta \\ &d^2\omega = d(d\omega) = 0 \quad 即 \quad d^2 = 0 \\ &d(f\omega) = fd\omega + df \wedge \omega \\ &d(\omega \wedge \pi) = d\omega \wedge \pi + (-1)^p \omega \wedge d\pi \end{aligned} \qquad (20.21)$$

【问题 20.5】 对于一次微分形式 ω_1，$\cdots$，ω_r，试证下式。

$$d(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r) = \sum_{\alpha=1}^{r} (-1)^{\alpha-1} \omega_1 \wedge \cdots \wedge d\omega_\alpha \wedge \cdots \wedge \omega_r$$

引理 4.2 在 R^n 内的域 $D\{(x^1, \cdots, x^n) | a^i < x^i < b^i, i = 1, \cdots, n\}$ 里，如果 p 次微分形式 ω 满足 $d\omega = 0$，则在D内存在 $p-1$ 次微分形式 π，使得 $\omega = d\pi$。



图 4.6

〈**证明**〉 从略。然而，$n=2$，$p=1$；$n=3$，$p=1$；$n=3$，$p=2$ 三种情况的证明分别请参照例 20.1，20.2，20.3。

例 20.1 就 $n=2$，$p=1$ 的情况试证引理 4.2。

〈**解答**〉 设 $\omega = \omega_1 dx + \omega_2 dy$，$\omega_1$ 与 ω_2 是D内的C^∞函数. 在D内固定一点(x_0, y_0)，在D内任取一点(x, y)。沿如图 4.6 的折线作线积分，令

故

$$f(x, y)=\int_{x_0}^{x} \omega_1(x, y_0)dx+\int_{y_0}^{y} \omega_2(x, y)dy$$

则 $f(x, y)$是定义在D内的 C^∞ 函数。对于此 f

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\omega_1(x, y_0)+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial \omega_2(x, y)}{\partial x}dy,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\omega_2(x, y)$$

然因 $d\omega=0$，故

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y}=\frac{\partial \omega_2}{\partial x}$$

将此式代入上列第一式得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\omega_1(x, y_0)+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial \omega_1(x, y)}{\partial y}dy=\omega_1(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\omega_2(x, y)$$

故

$$\omega=df$$

（证毕）

例 20.2 就 $n=3$，$p=1$ 的情况，试证引理 4.2。

〈解答〉 设 $\omega=\omega_1 dx+\omega_2 dy+\omega_3 dz$；$\omega_1$，$\omega_2$，$\omega_3$为$D$内的$C^\infty$函数。在$D$内固定一点$(x_0, y_0, z_0)$，在$D$内任取一点 (x, y, z)。沿如图4.7 的折线作线积分，令

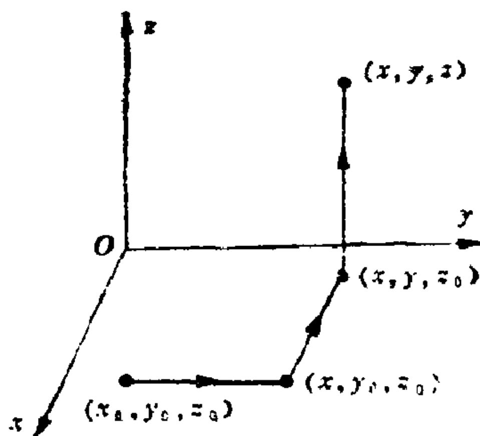


图 4.7

$$f(x, y, z)=\int_{x_0}^{x} \omega_1(x, y_0, z_0)dx+\int_{y_0}^{y} \omega_2(x, y, z_0)dy+\int_{z_0}^{z} \omega_3(x, y, z)dz$$

则 f 是D内的 C^∞函数。然因 $d\omega=0$，故

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial y}-\frac{\partial \omega_2}{\partial z}=0, \qquad \frac{\partial \omega_1}{\partial z}-\frac{\partial \omega_3}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x} - \frac{\partial \omega_1}{\partial y} = 0 \tag{20.22}$$

运用(20.22)，作如下计算：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \omega_1(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial \omega_2(x, y, z_0)}{\partial x} dy + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial \omega_3(x, y, z)}{\partial x} dz$$

$$= \omega_1(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial \omega_1(x, y, z_0)}{\partial y} dy + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial \omega_1(x, y, z)}{\partial z} dz = \omega_1(x, y, z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \omega_2(x, y, z_0) + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial \omega_3(x, y, z)}{\partial y} dz$$

$$= \omega_2(x, y, z_0) + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial \omega_2(x, y, z)}{\partial z} dz$$

$$= \omega_2(x, y, z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \omega_3(x, y, z)$$

故
$$\omega = df$$
（证毕）

例 20.3 就 $n=3$，$p=2$ 的情况，试证引理 4.2。

〈**解答**〉 设 $\omega = A_1 dy \wedge dz - A_2 dx \wedge dz + A_3 dx \wedge dy$；$A_1$，$A_2$，$A_3$ 在 D 内是 C^∞ 函数。然因 $d\omega = 0$，故

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} = 0 \tag{20.23}$$

在 D 内固定一点 (x_0, y_0, z_0)，在 D 内取任意点 (x, y, z)，定义下列函数 $B_1(x, y, z)$ 与 $B_2(x, y, z)$。

$$B_1(x, y, z) = \int_{z_0}^{z} A_2(x, y, z) dz,$$

$$B_2(x, y, z) = -\int_{z_0}^{z} A_1(x, y, z)dz + \int_{x_0}^{x} A_3(x, y, z_0)dx$$

在这里运用(20.23)并作如下计算。

$$-\frac{\partial B_2}{\partial z} = A_1(x, y, z), \quad \frac{\partial B_1}{\partial z} = A_2(x, y, z)$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} = -\int_{z_0}^{z} \frac{\partial A_1(x, y, z)}{\partial x}dz$$

$$+ A_3(x, y, z_0) - \int_{z_0}^{z} \frac{\partial A_2(x, y, z)}{\partial y}dz$$

$$= -\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial A_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial A_2(x, y, z)}{\partial y}\right)dz$$

$$+ A_3(x, y, z_0)$$

$$= \int_{z_0}^{z} \frac{\partial A_3(x, y, z)}{\partial z}dz + A_3(x, y, z_0)$$

$$= A_3(x, y, z)$$

今设 $\pi = B_1dx + B_2dy$，则

$$d\pi = -\frac{\partial B_2}{\partial z}dy\wedge dz - \frac{\partial B_1}{\partial z}dx\wedge dz$$

$$+\left(\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

$$= A_1dy\wedge dz - A_2dx\wedge dz + A_3dx\wedge dy$$

故 $$w = d\pi$$ (证毕)

从引理 4.2 立即可得下列定理。

定理 4.3 设流形M上的 p 次微分形式 ω 满足 $d\omega = 0$。这时，对于M内的各点P，存在包含P的适当邻域O以及定义在O内的$(p-1)$次微分形式 π 使在邻域O内 $\omega = d\pi$。

《**注意**》在定理 4.3 里，一般说来，不一定在整个M上存在 π。例如，在从 R^2 去掉原点(0, 0)而得的域D里，考虑

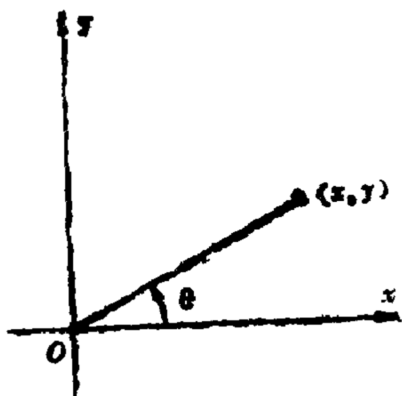


图 4.8

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

则$d\omega=0$。再在D的各点(x, y)，考虑角θ如图 4.8，则

$$\omega = d\theta = d\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

然而θ在D上是多值函数，不是定义在D上的函数。

人们知道，当定理 4.3 里的M是单连通的（能将M上的连续闭曲线连续地收缩于一点）时，满足$\omega=d\pi$的π在整个M上存在。

与向量分析的关系 在三维仿射空间R^3里设f为C^∞函数．设X为向量场，X的分量为(X_1, X_2, X_3)。

因df的分量为

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3}\right)$$

故df表示$\mathrm{grad}f$。

对于一次微分形式$\omega=\sum_i X_i dx^i$，

$$d\omega = \sum_{j<i}(\partial_j X_i - \partial_i X_j)dx^j\wedge dx^i$$

故$d\omega$表示$\mathrm{rot}X$。

对于二次微分形式$\pi = X_1dx^2\wedge dx^3 - X_2dx^1\wedge dx^3 + X_3dx^1\wedge dx^2$，因

$$d\pi = (\sum_i \partial_i X_i)dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$$

故$d\pi$表示$\mathrm{div}X$。

例 20.1，例 20.2 分别说明以下事实：如果$\mathrm{rot}X=0$，那末局部地存在满足$X=\mathrm{grad}f$的函数f.这时，$-f$为X的**势**。又如果$\mathrm{div}X=0$，则局部地存在满足$X=\mathrm{rot}Y$的向量场Y。这时，Y是X的**向量势**。

§21 微分形式在曲面论上的应用

考虑欧氏空间 E^3 里的简单曲面 S。取 S 的坐标邻域 O，设 O 内的坐标为 (u^1, u^2)。对于定义在 O 上 E^3 内的 C^∞ 向量函数 $\boldsymbol{A}(u^1, u^2)$（不必要与 S 相切），

$$当\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x(u^1, u^2) \\ A_y(u^1, u^2) \\ A_z(u^1, u^2) \end{pmatrix} 时，d\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} dA_y \\ dA_y \\ dA_z \end{pmatrix}$$

叫做 $\boldsymbol{A}$ 的**微分**。

从第三章的(13.1)，(13.2)，(13.3)分别得

$$\begin{aligned} dP &= du^h \boldsymbol{x}_h \\ d\boldsymbol{x}_i &= \theta_i{}^h \boldsymbol{x}_h + \theta_i{}^3 \boldsymbol{N} \\ d\boldsymbol{N} &= \theta_3{}^h \boldsymbol{x}_h \end{aligned} \tag{21.1}$$

但式中用 dP 表示了 $d\boldsymbol{x} = (\partial \boldsymbol{x}/\partial u^i) du^i$，而且令

$$\theta_i{}^h = \left\{ {h \atop ji} \right\} du^j, \quad \theta_i{}^3 = H_{ji} du^j, \quad \theta_3{}^h = -H_j{}^h du^j \tag{21.2}$$

(21.1)是用微分形式表达的曲面 S 的基本公式。这些式子分别可以看做点 P，切向量 $\boldsymbol{x}_i$ 以及单位法向量 $\boldsymbol{N}$ 的微小变化的表达式。

在上列(21.1)的各式里，作两边的外微分，再运用(21.1)可得下式。

$$\begin{aligned} d\theta_i{}^h + \theta_p{}^h \wedge \theta_i{}^p &= -\theta_3{}^h \wedge \theta_i{}^3 \\ d\theta_i{}^3 + \theta_p{}^3 \wedge \theta_i{}^p &= 0 \end{aligned} \tag{21.3}$$

将(21.2)代入上式两边得

$$\begin{aligned} R_{kji}{}^h du^k \wedge du^j &= (H_k{}^h H_{ji} - H_j{}^h H_{ki}) du^k \wedge du^j \\ (\nabla_k H_{ji} - \nabla_j H_{ki}) du^k \wedge du^j &= 0 \end{aligned} \tag{21.4}$$

即(21.3)与高斯，柯达齐的结构方程(13.5)，(13.6) 等价。$\theta_i{}^h$ 叫做曲面在坐标邻域 O 里的**联络微分形式**。又因 $H_j{}^h = H_{ji} g^{ih}$，故从(21.2)可见，

$$\theta_3{}^h = -\theta_i{}^3 g^{ih} \tag{21.5}$$

【问题 21.1】 试证上述(21.3)。

【问题 21.2】 试证上述(21.4)。

再者，(21.3)的第一式左边

$$\Theta_i{}^h = d\theta_i{}^h + \theta_p{}^h \wedge \theta_i{}^p = K_{kji}{}^h du^k \wedge du^j$$

叫做曲面在O里的**曲率微分形式**。今令

$$\Theta_{ji} = \Theta_j{}^t g_{ih}$$

运用(21.4)得

$$\Theta_{11} = \Theta_{22} = 0, \quad \Theta_{12} = -\Theta_{21}$$

这时，从(21.4)的第一式可见，

$$\Theta_{12} = -\det(H_{ji})du^1 \wedge du^2 = -K\det(g_{ji})du^1 \wedge du^2$$

式中K为曲面S的全曲率。这也是高斯方程。

坐标变换 运用克氏记号的变换式（11.21）可知，在 $O \cap \overline{O}$ 里下式成立：设 $\overline{\theta}_i{}^h$为 $\overline{O}$ 里的联络微分形式，则

$$\overline{\theta}_i{}^h = \frac{\partial \overline{u}^h}{\partial u_p}\theta_q{}^p \frac{\partial u^q}{\partial \overline{u}^i} + \frac{\partial \overline{u}^h}{\partial u^p} d\left(\frac{\partial u^p}{\partial \overline{u}^i}\right)$$

即得微分形式所作矩阵的方程

$$\overline{\theta} = A^{-1}\theta A + A^{-1}dA \tag{21.6}$$

式中令

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1{}^1 & \theta_2{}^1 \\ \theta_1{}^2 & \theta_2{}^2 \end{pmatrix}, \quad \overline{\theta} = \begin{pmatrix} \overline{\theta}_1{}^1 & \overline{\theta}_2{}^1 \\ \overline{\theta}_1{}^2 & \overline{\theta}_2{}^2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \partial u^1/\partial \overline{u}^1 & \partial u^1/\partial \overline{u}^2 \\ \partial u^2/\partial \overline{u}^1 & \partial u^2/\partial \overline{u}^2 \end{pmatrix}$$

上述(21.6)是**联络微分形式θ的变换式**。其次令

$$\theta \wedge \theta = \begin{pmatrix} \theta_p{}^1 \wedge \theta_1{}^p & \theta_p{}^1 \wedge \theta_2{}^p \\ \theta_p{}^2 \wedge \theta_1{}^p & \theta_p{}^2 \wedge \theta_2{}^p \end{pmatrix}$$

以及

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_1{}^1 & \Theta_2{}^1 \\ \Theta_1{}^2 & \Theta_2{}^2 \end{pmatrix} = d\theta + \theta \wedge \theta, \quad \overline{\Theta} = d\overline{\theta} + \overline{\theta} \wedge \overline{\theta}$$

再运用(21.6)可得，在 $O \cap \overline{O}$ 中

$$\overline{\Theta} = A^{-1}\Theta A \tag{21.7}$$

此(21.7)叫做**曲率微分形式**[Θ] **的变换式**。

【问题 21.3】 试证下式（利用 $A^{-1}A=I$ 及(2.16)）。

(1) $dA^{-1}=-A^{-1}(dA)A^{-1}$。

(2) 曲率微分形式的变换式(21.7)成立。

单位正交标架 在曲面 S 上的一点 P，取互相正交的单位向量 e_1，e_2，组 $(P;\ e_1,\ e_2)$ 叫做单位正交标架。在 S 的坐标邻域 O 的各点 P 对应以单位正交标架 $(P;\ e_1,\ e_2)$，当 e_1，e_2 在 O 内作成向量场时，此对应 $P\mapsto(P;\ e_1,\ e_2)$ 叫做 O 里的**单位正交标架**。

设在坐标邻域 O 里给定单位正交标架 $(P;\ e_1,\ e_2)$。这时可设在 O 里 $e_1\times e_2=N$ 成立。此时尚成立

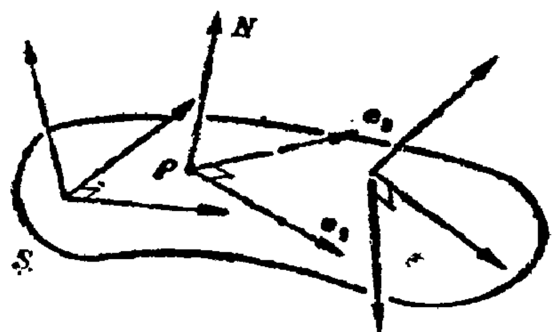


图 4.9

$$e_j\cdot e_i=\delta_{ji}=\begin{cases}1 & (i=j),\\ 0 & (i\neq j),\end{cases}$$

$$e_j\cdot N=0 \qquad (21.8)$$

又因 $e_1\times e_2=N$

$=x_1\times x_2/\sqrt{\det(g_{ji})}$，故令

$$e_i=\sum_j a_{ji}x_j,\quad x_i=\sum_j b_{ji}e_j,\quad \det(b_{ji})>0 \qquad (21.9)$$

则 $A=(a_{ji})$ 与 $B=(b_{ji})$ 为正则矩阵，$B=A^{-1}$.再令

$$\omega_j=\sum_i b_{ji}du^i \qquad (21.10)$$

则从(21.1)的第一式得下式。

$$dP=\sum_i \omega_i e_i \qquad (21.11)$$

其次运用(21.10)与 $B=A^{-1}$，则得下式

$$\omega_i(e_h)=\delta_{ih} \qquad (21.12)$$

根据(21.1)的第一式得

$$dP\cdot dP=(x_j\cdot x_i)du^jdu^i=g_{ji}du^jdu^i=ds^2$$

故用(21.11)，关于线素得到下式

$$ds^2=(\omega_1)^2+(\omega_2)^2 \qquad (21.13)$$

整理(21.12)与(21.13)，得下列定理。

定理 4.4 对于曲面在坐标邻域O里的单位正交标架$(P;e_1,e_2)$，在坐标邻域O里存在两个一次微分形式 ω_1 与 ω_2 使下式成立。

$$ds^2=(\omega_1)^2+(\omega_2)^2,\quad \omega_j(e_i)=\delta_{ji}$$

用 e_1，e_2，N的线性组合表示 de_i 与 dN，可令

$$\begin{aligned} de_i&=\sum_h \omega_{ih}e_h+\omega_{i3}N \\ N&=\sum_h \omega_{3h}e_h+\omega_{33}N \end{aligned}\qquad (21.14)$$

式中 ω_{ih}，ω_{i3}，ω_{3h}，ω_{33} 是定义在O里的一次微分形式。此外，如果将 $x_i=\sum_j b_{ji}e_j$ 与$du^i=\sum_i a_{ij}\omega_j$ 代入(21.1)应该得到(21.14)。

作(21.8)两边的外微分可得

$$e_j\cdot e_i+e_j\cdot de_i=0,\quad de_i\cdot N+e_i\cdot dN=0$$

将(21.14)代入此式则得

$$\omega_{ih}+\omega_{hi}=0,\quad \omega_{i3}+\omega_{3i}=0,\quad \omega_{33}=0$$

于是可令

$$\omega_{12}=-\omega_{21}=-\varphi,\quad \omega_{i3}=-\omega_{3i}=\lambda_i$$

从(21.1)与(21.14)可得下式。

$$\begin{aligned} dP&=\omega_1e_1+\omega_2e_2 \\ de_1&=-\varphi e_2+\lambda_1N,\quad de_2=\varphi e_1+\lambda_2N \\ dN&=-\lambda_1e_1-\lambda_2e_2 \end{aligned}\qquad (21.15)$$

此式与曲面的基本公式(21.1)等价。

在(21.15)的各式，作两边的外微分，再用(21.15)可得下式

$$\begin{aligned} d\omega_1+\varphi\wedge\omega_2&=0,\quad d\omega_2-\varphi\wedge\omega_1=0 \\ d\lambda_1+\varphi\wedge\lambda_2&=0,\quad d\lambda_2-\varphi\wedge\lambda_1=0 \\ d\varphi-\lambda_1\wedge\lambda_2&=0 \end{aligned}\qquad (21.16)$$

以及

$$\lambda_1\wedge\omega_1+\lambda_2\wedge\omega_2=0\qquad (21.17)$$

上列(21.6)与结构方程(21.4)等价。

因为 ω_1 与 ω_2 线性无关（关于 C^∞ 函数 f,g，如果 $f\omega_1+g\omega_2=0$，则必 $f=0$，$g=0$）以及(21.10)，故在 O 内，任意微分形式总可用 ω_1 与 ω_2 或 $\omega_1\wedge\omega_2$ 的线性组合表示。因此，设

$$\lambda_j=\sum_i \lambda_{ji}\omega_i \tag{21.18}$$

则得下列引理。

引理 4.5 上述(21.18)的右边中的系数 λ_{ji} 是对称的。即

$$\lambda_{ji}=\lambda_{ij}$$

此 λ_{ji} 叫做曲面 S 关于单位正交标架$(P;\ e_1,\ e_2)$的**第二基本量**。

〈**证明**〉 将(21.18)代入(21.17)得

$$\sum_{j,i}\lambda_{ji}\omega_j\wedge\omega_i=0$$

$$\therefore \qquad (\lambda_{12}-\lambda_{21})\omega_1\wedge\omega_2=0$$

$$\therefore \qquad \lambda_{12}=\lambda_{21}$$

这说明 $\lambda_{ji}=\lambda_{ij}$。 （证毕）

再将(21.18)代入(21.16)的第三式可得高斯方程

$$d\varphi=\det(\lambda_{ji})\omega_1\wedge\omega_2 \tag{21.19}$$

此 $d\varphi$ 叫做曲面的**曲率微分形式**。

回忆 de_i 的定义可得

$$(de_i)(e_j)=\partial_{e_j}e_i \tag{21.20}$$

运用(21.15)的第二，第三式可得

$$\partial_{e_j}e_1=\varphi(e_j)e_2+\lambda_1(e_j)N$$

$$\partial_{e_j}e_2=-\varphi(e_j)e_1+\lambda_2(e_j)N$$

故回忆(11.2)可得下式

$$\nabla_{e_j}e_1=-\varphi(e_j)e_2,\quad \nabla_{e_j}e_2=\varphi(e_j)e_1$$

$$\lambda_{ji}=H(e_j,\ e_i) \tag{21.21}$$

运用(21.9)的第一式，(21.21)的第二式变为

$$\lambda_{ji}=\sum_{q,p}H_{qp}a_{qj}a_{pi} \tag{21.22}$$

然而，运用(21.9)的第二式得

$$g_{ji}=\boldsymbol{x}_j\cdot\boldsymbol{x}_i=\sum_p b_{pj}b_{pi} \qquad (21.23)$$

$$\therefore \qquad \det(g_{ji})=[\det(b_{ji})]^2=[\det(a_{ji})]^{-2}$$

式中运用了$(b_{ji})=(a_{ji})^{-1}$。运用此式，从(21.22)可得

$$\det(\lambda_{ji})=\frac{\det(H_{ji})}{\det(g_{ji})}=K$$

式中，K为曲面S的全曲率。故(21.19)变为

$$d\varphi=K\omega_1\wedge\omega_2 \qquad (21.24)$$

整理以上事实，可得下列定理 4.6 与定理 4.7。

定理 4.6 对于曲面的各坐标邻域O内的单位正交标架$(P;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$，下列基本公式

$$\begin{aligned}dP&=\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2\\ d\boldsymbol{e}_1&=-\varphi\boldsymbol{e}_2+\lambda_1\boldsymbol{N}\\ d\boldsymbol{e}_2&=\varphi\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{N}\\ d\boldsymbol{N}&=-\lambda_1\boldsymbol{e}_1-\lambda_2\boldsymbol{e}_2\end{aligned}$$

成立。但ω_1，ω_2，φ，λ_1，λ_2为定义在O内的一次微分形式，ω_1与ω_2满足定理 4.4 里所述性质。这时，可令

$$\lambda_j=\sum_i\lambda_{ji}\omega_i$$

而且$\lambda_{ji}=\lambda_{ij}$。式中$\varphi$叫做$O$里的**联络微分形式**。

定理 4.7 使用定理 4.4 的符号，下列结构方程成立。

$$d\omega_1+\varphi\wedge\omega_2=0,\ d\omega_2-\varphi\wedge\omega_1=0$$

$$d\lambda_1+\varphi\wedge\lambda_2=0,\ d\lambda_2-\varphi\wedge\lambda_1=0 \qquad \text{(柯达齐)}$$

$$d\varphi=K\omega_1\wedge\omega_2 \qquad \text{(高斯)}$$

式中K为曲面的全曲率。此外

$$H(\boldsymbol{e}_j,\ \boldsymbol{e}_i)=\lambda_{ji}$$

成立。$d\varphi$是**曲率微分形式**。

标架的变换 设曲面S有向（参照§7），从给S以方向的图册之

中，取两个坐标邻域 O 与 $\bar{O}$，设在 O 与 $\bar{O}$ 里分别给定单位正交标架 $(P; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$和$(P; \bar{\boldsymbol{e}}_1, \bar{\boldsymbol{e}}_2)$（在 $O\cap\bar{O}$ 里 $\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{N}=\bar{\boldsymbol{N}}=\bar{\boldsymbol{e}}_1\times\bar{\boldsymbol{e}}_2$ 成立）。这时在 $O\cap\bar{O}$ 里

$$\bar{\boldsymbol{e}}_1=\cos\theta\boldsymbol{e}_1-\sin\theta\boldsymbol{e}_2,\quad \bar{\boldsymbol{e}}_2=\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\boldsymbol{e}_2 \qquad (21.25)$$

成立。但 θ 为 $O\cap\bar{O}$ 里的 C^∞ 函数。在 O 与 $\bar{O}$ 里运用（21.15），可得下式在 $O\cap\bar{O}$ 里成立。

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_1&=\cos\theta\omega_1-\sin\theta\omega_2,\\ \bar{\omega}_2&=\sin\theta\omega_1+\cos\theta\omega_2,\\ \bar{\varphi}&=\varphi+d\theta\end{aligned} \qquad (21.26)$$

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_1&=\cos\theta\lambda_1-\sin\theta\lambda_2,\\ \bar{\lambda}_2&=\sin\theta\lambda_1+\cos\theta\lambda_2,\end{aligned} \qquad (21.27)$$

$$\therefore \qquad d\bar{\varphi}=d\varphi$$

【问题 21.4】 试证上述(21.26)与(21.27)。

根据上述(21.27)可得下列定理。

定理 4.8 当曲面 S 有向时，其曲率微分形式 $d\varphi$ 是在整个 S 上定义的一个二次微分形式。

运用（21.26），显然在 $O\cap\bar{O}$ 里，下式成立。

$$\bar{\omega}_1\wedge\bar{\omega}_2=\omega_1\wedge\omega_2 \qquad (21.28)$$

【问题 21.5】 试证上述(21.28)。

根据（21.28)可得以下定理。

定理 4.9 当曲面 S 有向时，体积素

$$\omega_1\wedge\omega_2=\sqrt{\det(g_{ji})}\,du^1\wedge du^2$$

在整个 S 上定义一个二次微分形式。

〈**证明**〉 运用(21.10)得

$$\omega_1\wedge\omega_2=\det(b_{ji})du^1\wedge du^2,\quad \det(b_{ji})>0$$

然而，由(21.23)可见

$$\det(g_{ji})=[\det(b_{ji})]^2,$$

$$\therefore \qquad \sqrt{\det(g_{ji})}=\det(b_{ji})$$

$$\therefore \qquad \omega_1 \wedge \omega_2 = \sqrt{\det(g_{ji})}\, du^1 \wedge du^2 \qquad (证毕)$$

例 21.1 对于半径为 a 的球面，试证下式。

$$\lambda_j = \frac{1}{a}\omega_j, \quad d\varphi = \frac{1}{a^2}\omega_1 \wedge \omega_2$$

〈**解答**〉 于此球面里， $H_{ji} = \frac{1}{a} g_{ji}$。 故由（21.21）的第三式得

$$\lambda_{ji} = \frac{1}{a}\delta_{ji}, \quad \therefore \lambda_j = \sum_i \lambda_{ji}\omega_i = \frac{1}{a}\omega_j$$

再运用(21.16)得

$$d\varphi = \frac{1}{a^2}\omega_1 \wedge \omega_2 \qquad (证毕)$$

共变外微分 设给定曲面 S 上的向量场 $\boldsymbol{X}$。在坐标邻域 O 里，设 $\boldsymbol{X}$ 的局部表示为

$$\boldsymbol{X} = X_1\boldsymbol{e}_1 + X_2\boldsymbol{e}_2$$

求此式两边的外微分，并且运用(21.15)得

$$d\boldsymbol{X} = (dX_1 + X_2\varphi)\boldsymbol{e}_1 + (dX_2 - X_1\varphi)\boldsymbol{e}_2 - (X_1\lambda_1 + X_2\lambda_2)\boldsymbol{N}$$

故 $d\boldsymbol{X}$ 在切平面上的分量为

$$D\boldsymbol{X} = (dX_1 + X_2\varphi)\boldsymbol{e}_1 + (dX_2 - X_1\varphi)\boldsymbol{e}_2 \qquad (21.29)$$

叫做 $\boldsymbol{X}$ 的**共变外微分**，用左边的符号表示。当 $D\boldsymbol{X}=0$ 时，向量场 $\boldsymbol{X}$ **平行**。在这种含义下的平行向量场与第二章 § 11 定义的等价． 故得

向量场 $\boldsymbol{X}$ 平行的充要条件是

$$dX_1 + X_2\varphi = 0, \quad dX_2 - X_1\varphi = 0 \qquad (21.30)$$

例 21.2 在全曲率 K 不为 0 的曲面 S 上，平行向量场为 0 ． 试证明之。

〈**解答**〉 设 $\boldsymbol{X}$ 为平行向量场，则(21.30)成立。在(21.30)的第一式的两边求外微分，代入第二式，得

$$X_2 d\varphi = 0$$

同理得

$$X_1 d\varphi = 0$$

然因$K\neq 0$，故由定理 4.7 可见，$d\varphi=K\omega_1\wedge\omega_2\neq 0$。故$X_1=0$，$X_2=0$。即

$$X=0$$ （证毕）

定理 4.10 如果E^3里的曲面S的全曲率到处为O，则对S的各点P，存在含P的邻域，此邻域O与平面的一部分等距。

〈证明〉 在S的坐标邻域$(U,\ \theta,\ O)$里，设U为R^2 的域$\{(u^1,u^2)\,|\,a<u^1<b,\ c<u^2<b\}$，在$O$内考虑单位正交标架$(P;\ e_1,\ e_2)$。如果$K=0$，则由定理 4.7 可见$d\varphi=0$。故根据定理 4.3，在邻域$O$里存在$C^\infty$ 函数θ满足

$$\varphi=d\theta$$

在O里，重新作单位正交标架$(P;\ \bar{e}_1,\ \bar{e}_2)$使得

$$\bar{e}_1=\cos(-\theta)e_1-\sin(-\theta)e_2$$
$$\bar{e}_2=\sin(-\theta)e_1+\cos(-\theta)e_2$$

则由(21.26)可得

$$\bar{\varphi}=0$$

故运用定理 4.7 得下式

$$d\omega_1=0,\ d\omega_2=0$$

再用定理 4.3 可知，在邻域O里存在C^∞ 函数$\bar{u}^1$ 与$\bar{u}^2$ 使得

$$\omega_1=d\bar{u}^1,\ \ \omega_2=d\bar{u}^2$$

然而根据定理 4.4，此曲面S的线素ds^2在O内为

$$ds^2=(\omega_1)^2+(\omega_2)^2=(d\bar{u}^1)^2+(d\bar{u}^2)^2$$

这说明邻域O与平面的一部分等距。（证毕）

习　题　四

1. 试证下式。

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^j},\ \frac{\partial}{\partial x^i}\right]=0$$

2. 设向量场X的分量为$(X^1,\ \cdots,\ X^n)$，余向量场u的分量为$(u_1,\ \cdots,\ u_n)$，(1，1)阶张量场$T=u\otimes X$的分量为$T_i{}^j$，试证下列矩

阵方程：

$$(T_j{}^i)=\begin{pmatrix}X^1\\ \vdots\\ X^n\end{pmatrix}(u_1,\ \cdots,\ u_n)$$

成立。

3. 设X，Y为任意向量场。对于一次微分形式，试证下式。

$$du(X,\ Y)=Xu(Y)-Yu(X)-u([X,\ Y])$$

4. 设X，Y，Z为任意向量场，对于二次微分形式，试证下式。

$$\begin{aligned}d\omega(X,\ Y,\ Z)&=X\omega(Y,\ Z)-Y\omega(X,\ Z)\\&+Z\omega(X,\ Y)-\omega([X,\ Y],\ Z)\\&+\omega([X,\ Z],\ Y)-\omega([Y,\ Z],\ X)\end{aligned}$$

5. 运用习题四之3与4，试证下列事实。

(1) 对于C^∞函数f，　　$ddf=0$

(2) 对于一次微分形式u，　　$ddu=0$

6. 设F为(1，1)阶张量场。对于任意向量场X，Y，考虑向量场

$$\begin{aligned}N(X,\ Y)&=[FX,\ FY]-F[FX,\ Y]\\&-F[X,\ FY]+F(F[X,\ Y])\end{aligned}$$

试证下式。

(1) 对于任意C^∞函数f，g，

$$N(fX,\ gY)=fgN(X,\ Y)$$

(2) N定义(1，2)阶张量场。此张量场叫做(1，1)阶张量场F的**奈因亥斯**(Nijenhuis) **张量**。

(3) 设F的分量为$F_i{}^h$，则 Nijenhuis 张量N的分量为

$$\begin{aligned}N_{ji}{}^h&=F_j{}^k\partial_kF_i{}^h-F_i{}^k\partial_kF_j{}^h\\&-(\partial_jF_i{}^k-\partial_iF_j{}^k)F_k{}^h,\quad(\partial_i=\partial/\partial x^i)\end{aligned}$$

7. 对于m个向量场X_1，X_2，…，X_m与m个一次微分形式ω_1，ω_2，…，ω_m，试证下式。

$$(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_m)(X_1, \cdots, X_m)=\begin{vmatrix}\omega_1(X_1) & \cdots & \omega_m(X_1)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \omega_1(X_m) & \cdots & \omega_m(X_m)\end{vmatrix}$$

8. 设X为向量场.定义 $L_X:\Lambda^p\to\Lambda^p$如下.对于一次微分形式 ω,

$$(L_X\omega)(Y)=X\omega(Y)-\omega([X, Y])$$

对于二次微分形式 ω,

$$(L_X\omega)(Y, Z)=X\omega(Y, Z)-\omega([X, Y], Z)-\omega(Y, [X, Z])$$

对于三次微分形式 ω,

$$\begin{aligned}(L_X\omega)(Y, Z, W)&=X\omega(Y, Z, W)\\&-\omega([X, Y], Z, W)-\omega(Y, [X, Z], W)\\&-\omega(Y, Z, [X, W])\end{aligned}$$

式中Y,Z,W 为任意的向量场. 以下同理对于p次微分形式 ω 定义$L_X\omega$. $L_X\omega$ 叫做 ω 关于X的**李导数**. 试证以下各式.其中设ω与π为任意p次微分形式, η 为任意q次微分形式.

(1)
$$L_X(\omega+\pi)=L_X\omega+L_X\pi$$
$$L_X(f\omega)=(Xf)\omega+fL_X\omega$$

式中f为任意 C^∞ 函数.

(2)
$$L_X(\omega\wedge\eta)=(L_X\omega)\wedge\eta+\omega\wedge(L_X\eta)$$

9. 设X为向量场. 定义 $i_X:\Lambda^p\to\Lambda^{p-1}$ 如下: 对于 p次微分形式 ω,

$$(i_X\omega)(X_1, \cdots, X_{p-1})=\omega(X, X_1, \cdots, X_{p-1})$$

但X_1, $\cdots$, X_{p-1}为任意向量场. 试证下列事实. 其中设π为任意p次微分形式.

(1)
$$i_X(\omega+\pi)=i_X\omega+i_X\pi$$
$$i_X(f\omega)=fi_X\omega$$

但设f为任意 C^∞ 函数.

(2)
$$i_X(\omega\wedge\eta)=(i_X\omega)\wedge\eta+(-1)^p\omega\wedge(i_X\eta)$$

式中 η 为任意微分形式.

10. 对于向量场X，按下列方式证实下列公式成立。

$$di_X + i_X d = L_X$$

(1) 使上式两边作用在0次微分形式（C^∞ 函数）f上，试证上述公式。

(2) 与(1)相同，就一次微分形式θ证明之。

(3) 与(1)相同，就二次微分形式ω证明之。

11. 运用习题四之 10 的公式，试证

$$dL_X = L_X d.$$

12. 在圆 S^1上固定一点P_0。当 S^1上任意点P的（从P_0量起）圆心角为θ时，以$P(\theta)$表示P。作 S^1 的开子集

$$O_1 = \left\{P(\theta) \mid 0 < \theta < \frac{4\pi}{3}\right\},$$

$$O_2 = \left\{P(\theta) \mid \frac{2\pi}{3} < \theta < 2\pi\right\},$$

$$O_3 = \left\{P(\theta) \mid \frac{4\pi}{3} < \theta < \frac{8\pi}{3}\right\}.$$

则$\{O_1, O_2, O_3\}$为 S^1 的开复盖。再设 $I_1 = I_2 = I_3 = \left(0, \frac{4\pi}{3}\right)$，映射 $\theta_\alpha: I_\alpha \to O_\alpha (\alpha = 1, 2, 3)$ 的定义分别为 $\theta_1(x) = P(x)$，$\theta_2(x) = P\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$，$\theta_3(x) = P\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$。这时$\{(I_\alpha, \theta_\alpha, O_\alpha) \mid \alpha = 1, 2, 3\}$决定一维流形的结构。试证明之。

第五章 黎曼空间

§22 共变微分

取 n 维黎曼空间(M,g)的坐标邻域O。设黎曼度量张量g在O里的分量为 g_{ji}。根据(11.10)用此 g_{ji} 作克氏记号$\left\{ {h \atop j\,i} \right\}$。取其他坐标邻域$\overline{O}$，设$g$在$\overline{O}$里的分量为$\overline{g}_{ji}$，则在$O \cap \overline{O}$里

$$\overline{g}_{ji} = \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i} g_{qp}$$

成立。故与§11里的讨论一样，设在$\overline{O}$里的克氏记号为$\overline{\left\{ {h \atop j\,i} \right\}}$，则在$O \cap \overline{O}$里克氏记号的变换式(11.21)成立。

向量场的共变微分 设M上的向量场X在O与$\overline{O}$的分量分别为$(X^1,\cdots,X^n)$与$(\overline{X}^1,\cdots,\overline{X}^n)$，则在$O \cap \overline{O}$里

$$\overline{X}^h = \frac{\partial \overline{x}^h}{\partial x^i} X^i \tag{22.1}$$

成立。模仿(11.19)，在坐标邻域O里令

$$\nabla_j X^h = \partial_j X^h + \left\{ {h \atop j\,i} \right\} X^i, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{22.2}$$

在坐标邻域$\overline{O}$里也作相当于(22.2)的$\nabla_i \overline{X}^h$。运用(22.1)与(11.21)，可证明在$O \cap \overline{O}$里下式成立。

$$\nabla_j \overline{X}^h = \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial \overline{x}^h}{\partial x^p} \nabla_q X^p \tag{22.3}$$

总之，在各邻域O里，存在以$\nabla_j X^h$为分量的(1，1)阶张量场∇X。∇X叫做向量场X的**共变导函数**或**共变微分**。此外，取向量场Y，设在O里的分量为$(Y^1,\cdots,Y^n)$。在O里，令

$$\nabla_Y X^h = Y^j \nabla_j X^h \tag{22.4}$$

则存在以它为分量的向量场 $\nabla_Y X$。$\nabla_Y X$ 叫做 X 关于 Y 的**共变微分**。这时下列定律成立：对于任意的 C^∞ 函数与任意的向量场 X，Y，

$$\nabla_{fY} X = f\nabla_Y X, \quad \nabla_Y(fX) = f\nabla_Y X + (Yf)X \tag{22.5}$$

【问题 22.1】 试证上述(22.5)。

张量场的共变微分 取(1,2) 阶张量场 T，设在坐标邻域 O 里的分量为 $T_{ji}{}^h$。在 O 里，令

$$\nabla_k T_{ji}{}^h = \partial_k T_{ji}{}^h + \left\{ {h \atop kp} \right\} T_{ji}{}^p - \left\{ {p \atop kj} \right\} T_{pi}{}^h - \left\{ {p \atop ki} \right\} T_{jp}{}^h. \tag{22.6}$$

在其他坐标邻域 $\overline{O}$ 里，作相当于此式的 $\nabla_k \overline{T}_{ji}{}^h$。在 $O \cap \overline{O}$ 里

$$\overline{T}_{ji}{}^h = \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial \overline{x}^h}{\partial x^p} T_{rq}{}^p \tag{22.7}$$

成立。

运用(22.7)与克氏记号的变换式(11.21)，可见在 $O \cap \overline{O}$ 里下式成立。

$$\nabla_k \overline{T}_{ji}{}^h = \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k} \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial \overline{x}^h}{\partial x^p} \nabla_s T_{rq}{}^p \tag{22.8}$$

即在各坐标邻域 O 里存在以 $\nabla_k T_{ji}{}^h$ 为分量的(1，3)阶张量场 ∇T。此 ∇T 叫做张量场 T 的**共变导函数**或**共变微分**。设向量场 Y 在坐标邻域 O 里的分量为 $(Y^1, \cdots, Y^n)$，令

$$\nabla_Y T_{ji}{}^h = Y^k \nabla_k T_{ji}{}^h \tag{22.9}$$

则存在以它为分量的(1,2)阶张量场 $\nabla_Y T$。$\nabla_Y T$ 叫做 T 关于 Y 的**共变微分**。

【问题 22.2】 试证上述(22.8)。

与上述讨论完全相同，可定义任意（p，q）阶张量场 T 的**共变微分** ∇T。∇T 是(p，$q+1$)阶张量场。也可定义 $\nabla_Y T$。$\nabla_Y T$ 为(p，q)阶张量场。最后，用下式定义 C^∞ 函数 f 的共变微分。

$$\nabla f = df, \qquad \nabla_Y f = Yf \tag{22.10}$$

故设在坐标邻域 O 里，C^∞ 函数 f，向量场 X，余向量场 u，（1，1）阶张量场 S，（0，2）阶张量场 T，（2，0）阶张量场 U 的分

量分别为

$$f, \quad \text{[illegible]} \quad U$$

则这些张量的共变微分 ∇f, ∇X, ∇u, ∇S, ∇T, ∇U 在 O 里分别有下列分量。

$$\nabla_k f = \partial_k f$$

$$\nabla_k X^h = \partial_k X^h + \left\{ {h \atop kp} \right\} X^p, \quad \nabla_k u_i = \partial_k u_i - \left\{ {p \atop ki} \right\} u_p$$

$$\nabla_k S_i{}^h = \partial_k S_i{}^h + \left\{ {h \atop kp} \right\} S_i{}^p - \left\{ {p \atop ki} \right\} S_p{}^h \qquad (22.11)$$

$$\nabla_k T_{ji} = \partial_k T_{ji} - \left\{ {p \atop kj} \right\} T_{pi} - \left\{ {p \atop ki} \right\} T_{jp}$$

$$\nabla_k U^{ji} = \partial_k U^{ji} + \left\{ {j \atop kp} \right\} U^{pi} + \left\{ {i \atop kp} \right\} U^{jp}$$

【问题 22.3】 如果 I 是单位张量场，试证 $\nabla I = 0$。

下列定律成立：设 f 为任意 C^∞ 函数，T 与 S 为任意(p, q)阶张量场，U 为任意(r, s)阶张量场，则

$$\nabla(fT) = (\nabla f) \otimes T + f \nabla T, \quad \nabla(T + S) = \nabla T + \nabla S \qquad (22.12)$$

$$\nabla(T \otimes U) = (\nabla T) \otimes U + T \otimes (\nabla U) \qquad (22.13)$$

上述(22.13)如用分量表达，设 T 为(1,2) 阶张量场，U 为(1,1)阶张量场，则得

$$\nabla_k (T_{ji}{}^h U_q{}^p) = (\nabla_k T_{ji}{}^h) U_q{}^p + T_{ji}{}^h (\nabla_k U_q{}^p) \qquad (22.14)$$

【问题 22.4】 试证上述 (22.14)。

设 T 为 (1, 2) 阶张量场，其分量为 $T_{ji}{}^h$。设 $W = \nabla T$ 的分量为 $W_{kji}{}^h$，则 W 关于指标 h 与 j 缩短之而得张量场的分量满足

$$W_{kpi}{}^p = \nabla_k V_i, \quad 式中 \quad V_i = T_{pi}{}^p$$

$$\therefore \quad W_{kpi}{}^p = \nabla_k T_{pi}{}^p \qquad (22.15)$$

总而言之，

求共变微分这种演算与缩短是可换的。

定理 5.1 在 n 维黎曼空间(M, g)里，下式成立。

$$\nabla g = 0 \quad \text{即} \quad \nabla_k g_{ji} = 0 \tag{22.16}$$

以及

$$\nabla_k g^{ji} = 0 \tag{22.17}$$

〈证明〉 (11.15)与(11.17)分别说明(22.16)与(22.17)成立。

（证毕）

定理 5.2 对于 n 维黎曼空间$(M,\ g)$上的任意向量场 X, Y, Z，下式成立。

$$\nabla_Z (X, Y) = (\nabla_Z X, Y) + (X, \nabla_Z Y), \quad \nabla_Z \|X\|^2 = 2(X, \nabla_Z X) \tag{22.18}$$

【问题 22.5】 运用定理 5.1，用分量证明定理 5.2。

例 22.1 设 n 维黎曼空间(M, g)上的 p 次微分形式 ω 的局部表示为

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{kj\cdots i} dx^k \wedge dx^j \wedge \cdots \wedge dx^i$$

试证 $d\omega$ 的分量为

$$\nabla_j \omega_{i_1 i_2 \cdots i_p} - \nabla_{i_1} \omega_{j i_2 \cdots i_p} - \nabla_{i_2} \omega_{i_1 j i_3 \cdots i_p} - \cdots - \nabla_{i_p} \omega_{i_1 \cdots i_{p-1} j}$$

〈证明〉 运用 (20.18) 与$\left\{ {h \atop ji} \right\} = \left\{ {h \atop ij} \right\}$立即可证。 （证毕）

【问题 22.6】 如果微分形式 ω 满足 $\nabla \omega = 0$，则 $d\omega = 0$。试证明之。

定理 5.3 当 n 维黎曼空间$(M,\ g)$有向时，则在整个 M 上存在以

$$\omega = \sqrt{g}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad g = \det(g_{ji})$$

为局部表示的 n 次微分形式 ω。此 ω 叫做$(M,\ g)$的**体积素**。

〈证明〉 在给 M 以方向的图册中任取两个坐标邻域 O 与 $\overline{O}$，与(8.15)一样，在 $O \cap \overline{O}$ 里

$$\sqrt{\overline{g}} = \frac{\partial(x^1, \cdots, x^n)}{\partial(\overline{x}^1, \cdots, \overline{x}^n)} \sqrt{g}$$

成立。又在 $O \cap \overline{O}$ 里

$$d\overline{x}^1 \wedge \cdots \wedge d\overline{x}^n = \left(\frac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^i} dx^i \right) \wedge \cdots \wedge \left(\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^i} dx^i \right)$$

$$= \frac{\partial(\overline{x}^1, \cdots, \overline{x}^n)}{\partial(x^1, \cdots, x^n)} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

故在$O\cap\overline{O}$里

$$\sqrt{g}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n=\sqrt{\overline{g}}\,d\overline{x}^1\wedge\cdots\wedge d\overline{x}^n \qquad \text{（证毕）}$$

当n维黎曼空间M有向时，则在定理 5.3 里出现的n次微分形式ω的分量为

$$\omega_{i_1\cdots i_n}=\sqrt{g}\,\varepsilon_{i_1\cdots i_n}. \tag{22.19}$$

式中令

$$\varepsilon_{i_1\cdots i_n}=\begin{cases}0 & \text{（当 } i_1\cdots i_n \text{ 中有相等的时候）}\\ \operatorname{sign}\begin{pmatrix}1\cdots n\\ i_1\cdots i_n\end{pmatrix} & \text{（当 } i_1\cdots i_n \text{ 相异时）}\end{cases} \tag{22.20}$$

但$\begin{pmatrix}1\cdots n\\ i_1\cdots i_n\end{pmatrix}$表示将 $1\cdots n$ 变为 $i_1\cdots i_n$ 的置换.

《**注意**》当 $n=2$ 时，ε_{ji} 有如下之值.

$$\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}=0,\qquad \varepsilon_{12}=-\varepsilon_{21}=1$$

当n维黎曼空间M有向时，可以证明存在以

$$\Pi^{i_1\cdots i_n}=\frac{1}{\sqrt{g}}\,\varepsilon^{i_1\cdots i_n}$$

为分量的反称$(n,\ 0)$阶张量场Π，但式中作了如下定义.

$$\varepsilon^{i_1\cdots i_n}=\varepsilon_{i_1\cdots i_n}$$

【问题 22.7】 当 $n=2$ 与 $n=3$ 时，试证下式.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{g}}\,\varepsilon^{i_1\cdots i_n}=g^{i_1j_1}\cdots g^{i_nj_n}\sqrt{g}\,\varepsilon_{j_1\cdots j_n}$

(2) $\sqrt{g}\,\varepsilon_{i_1\cdots i_n}=g_{i_1j_1}\cdots g_{i_nj_n}\dfrac{1}{\sqrt{g}}\,\varepsilon^{j_1\cdots j_n}$

例 22.2 试证下式.

$$\nabla\omega=0,\qquad \nabla\Pi=0$$

〈**解答**〉 证明 $n=2$ 的情况（一般情况大体相同）.

$$\nabla_k\omega_{ji}=\partial_k\omega_{ji}-\begin{Bmatrix}p\\kj\end{Bmatrix}\omega_{pi}-\begin{Bmatrix}p\\ki\end{Bmatrix}\omega_{jp}$$

再运用在例 11.2 里得到的

$$\frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^i} = \left\{ \begin{matrix} p \\ i\,p \end{matrix} \right\}$$

可得 $$\nabla_k \omega_{ji} = \sqrt{g} \left(\left\{ \begin{matrix} p \\ kp \end{matrix} \right\} \varepsilon_{ji} - \left\{ \begin{matrix} p \\ kj \end{matrix} \right\} \varepsilon_{pi} - \left\{ \begin{matrix} p \\ ki \end{matrix} \right\} \varepsilon_{ip} \right)$$

调查 $\nabla_k \omega_{11}$, $\nabla_k \omega_{12} = -\nabla_k \omega_{21}$, $\nabla_k \omega_{22}$ 之值，可见这些全是 0。故 $\nabla \omega = 0$。

其次，运用上述〔问题 22.7〕（1）与 $\nabla_k g_{ji} = 0$，从 $\nabla_k \omega = 0$ 可得 $\nabla_k \Pi = 0$。（证毕）

设 T 为(0,3)阶或(1,3)阶张量场，则下列关系成立。设 X, Y, Z, W 为任意向量场，

$$\begin{aligned} \nabla_W T(X,Y,Z) &= (\nabla_W T)(X,Y,Z) + T(\nabla_W X,Y,Z) \\ &\quad + T(X,\nabla_W Y,Z) + T(X,Y,\nabla_W Z) \end{aligned} \qquad (22.21)$$

此关系也可以推广到(0,q)阶或(1,q)阶张量场 T 上去。

【问题 22.8】 对于(0,2)阶张量场 T，证明(22.21)。

【问题 22.9】 对于(1,2)阶张量场 T，证明(22.21)。

平行张量场 当张量场 T 满足 $\nabla T = 0$ 时，T 叫做**平行张量场**。

【问题 22.10】 张量场 T 平行的充要条件是：对于任何向量场 Y 来说 $\nabla_Y T = 0$。试证明之。

【问题 22.11】 试证下列事实。

(1) 如果向量场 X 平行，那末 $\|X\|$ 一定。

(2) 如果向量场 X, Y 平行，那末内积 (X,Y) 一定。此外，X 与 Y 的夹角一定，但设到处 $X \neq 0$, $Y \neq 0$。

测地坐标系 在包含 n 维黎曼空间 (M,g) 的一点 P 的坐标邻域里，设其坐标系为 $(x^1,\cdots,x^n)$。当 $\left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\}$ 在 P 的值满足 $\left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\}_P = 0$ 时，坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$ 叫做以 P 为中心的**测地坐标系**。

定理 5.4 对于 n 维黎曼空间的任意点 P，在包含 P 的充分小邻域里，存在以 P 为中心的测地坐标系。

〈**证明**〉 在包含P的坐标邻域O里，设坐标系为$(x^1,\cdots,x^n)$。设P的坐标为$(x_0^1,\cdots,x_0^n)$，令

$$y^h=(x^h-x_0^h)+\frac{1}{2}\left\{{h \atop ji}\right\}_P(x^j-x_0^j)(x^i-x_0^i),$$

则 $(y^1,\ \cdots,\ y^n)$ 是包含P的充分小邻域U里的坐标系。原因是，因$(\partial y^h/\partial x^i)_P=\delta_i^h$，故在$U$内$\dfrac{\partial(y^1,\ \cdots,\ y^n)}{\partial(x^1,\ \cdots,\ x^n)}\neq 0$。关于新坐标系$(y^1,\cdots,y^n)$，设其克氏记号为$\left\{{\overline{h} \atop ji}\right\}$，则根据克氏记号的变换式(11.21) 得

$$\left\{{\overline{h} \atop ji}\right\}_P=0$$

讨论中运用了

$$\left(\frac{\partial y^h}{\partial x^i}\right)_P=\delta_i^h,\quad \left(\frac{\partial^2 y^h}{\partial x^j\partial x^i}\right)_P=\left\{{h \atop ji}\right\}_P \qquad \text{（证毕）}$$

定理 5.5 关于n维黎曼空间的以点P为中心的测地坐标系，

$$(\nabla_k T_{j\cdots}{}^{h\cdots})_P=(\partial_k T_{j\cdots}{}^{h\cdots})_P$$

成立。式中$T_{j\cdots}{}^{h\cdots}$为任意张量场T的分量。

〈**证明**〉 由测地坐标系的定义显然。

对于向量场X，C^∞ 函数

$$\mathrm{div}X=\nabla_i X^i \qquad (22.22)$$

叫做向量场X的**散度**，以左侧符号表示。对于C^∞函数f，伴随于其微分df的向量场的散度

$$\Delta f=\nabla_j(g^{ji}\nabla_i f)=g^{ji}\nabla_j\nabla_i f \qquad (22.23)$$

以左侧符号表示。下列算子叫做**拉氏算子**。

$$\Delta=g^{ji}\nabla_j\nabla_i \qquad (22.24)$$

运用例 11.2 的结果得

$$\mathrm{div}X=\partial_i X^i+\left\{{i \atop ih}\right\}X^h=\partial_i X^i+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^h}X^h,\quad (g=\det(g_{ji}))$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}\,\partial_i X^i+(\partial_i\sqrt{g})X^i)$$

故得下列公式。

公式
$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}\, X^i}{\partial x^i} \tag{22.25}$$

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, g^{ih} \frac{\partial f}{\partial x^h}\right) \tag{22.26}$$

§23 曲 率 张 量

就 n 维黎曼空间(M, g)进行讨论。对于三个任意向量场X, Y, Z，考虑向量场

$$R(X,\ Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{23.1}$$

这时，对应

$$R:(X,\ Y,\ Z) \mapsto R(X,\ Y)Z \tag{23.1$'$}$$

定义(1,3) 阶张量场R。以下证明之。

先设 f 为M的任意 C^∞ 函数，运用(22.5)可得

$$\nabla_{fX} \nabla_Y Z = f \nabla_X \nabla_Y Z$$

$$\nabla_Y \nabla_{fX} Z = \nabla_Y (f \nabla_X Z) = f \nabla_Y \nabla_X Z + (Yf) \nabla_X Z$$

$$\nabla_{[fX, Y]} Z = \nabla_{f[X,Y] - (Yf)X} Z = f \nabla_{[X,Y]} Z - (Yf) \nabla_X Z$$

因此，将这些式子代入(23.1)的右边得

$$R(fX,\ Y)Z = fR(X,\ Y)Z \tag{23.2}$$

其次，由(23.1)可见，$R(X,\ Y)Z = -R(Y,\ X)Z$，故运用(23.2)可得下式

$$R(X,\ fY)Z = fR(X,\ Y)Z \tag{23.3}$$

再求

$$\nabla_X \nabla_Y (fZ) = \nabla_X (f \nabla_Y Z + (Yf)Z)$$
$$= f \nabla_X \nabla_Y Z + (Xf) \nabla_Y Z + X(Yf) Z + (Yf) \nabla_X Z$$

同理求 $\nabla_Y \nabla_X (fZ)$。还有下式成立

$$\nabla_{[X,Y]} (fZ) = f \nabla_{[X,Y]} Z + ([X,\ Y]f) Z.$$

将这些式子代入(23.1)的右边，运用

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

可得

$$R(X, Y)(fZ) = fR(X, Y)Z \tag{23.4}$$

一齐考虑上述(23.2), (23.3), (23.4)以及

$$R(X+W, Y)Z = R(X, Y)Z + R(W, Y)Z$$
$$R(X, Y+W)Z = R(X, Y)Z + R(X, W)Z$$
$$R(X, Y)(Z+W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W$$

可见 (23.1)′ 的对应 R 是 (1,3) 阶张量场，此张量场叫做黎曼空间 (M, g) 的**曲率张量**。

在坐标邻域 O 里，设曲率张量 R 的分量为 $R_{kji}{}^{h}$，则

$$R_{kji}{}^{h}\frac{\partial}{\partial x^h} = R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

然因

$$\nabla_{\partial/\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} = \left\{ {h \atop ji} \right\}\frac{\partial}{\partial x^h}, \quad \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0,$$

将此二式代入上式右边，运用(23.1)可得下列公式。

公式

$$R_{kji}{}^{h} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{ {h \atop ji} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^j}\left\{ {h \atop ki} \right\} + \left\{ {h \atop kp} \right\}\left\{ {p \atop ji} \right\} - \left\{ {h \atop jp} \right\}\left\{ {p \atop ki} \right\} \tag{23.5}$$

这是**曲率张量的分量**公式。

其次，利用曲率张量的分量，令

$$R_{kjih} = R_{kji}{}^{p} g_{hp} \tag{23.6}$$

它叫做**曲率张量的共变分量**。将 $\left\{ {h \atop ji} \right\}$ 的定义式(11.10)代入 (23.5)的右边，运用(23.6)可得次式。

$$R_{kjih} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x^j \partial x^h} - \frac{\partial^2 g_{kh}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{ji}}{\partial x^k \partial x^h}\right)$$
$$+ \left(\left\{ {q \atop kp} \right\}\left\{ {p \atop ji} \right\} - \left\{ {q \atop jp} \right\}\left\{ {p \atop ki} \right\}\right) g_{qh} \tag{23.7}$$

利齐公式 在 (23.1) 里代入 $X=\partial/\partial x^k$，$Y=\partial/\partial x^j$，令 $Z=Z^h\partial/\partial x^h$，运用$[\partial/\partial x^j, \partial/\partial x^i]=0$ 可得

$$\nabla_k\nabla_j Z^h-\nabla_j\nabla_k Z^h=R_{kjp}{}^hZ^p \tag{23.8}$$

其次取余向量场 $u=u_i dx^i$，则得

$$\nabla_k\nabla_j u_i=\nabla_k\left(\partial_j u_i-\left\{{p \atop ji}\right\}u_p\right)=\partial_k\partial_j u_i-\partial_k\left\{{p \atop ji}\right\}u_p-\left\{{p \atop ji}\right\}\partial_k u_p$$

$$-\left\{{q \atop kj}\right\}\left(\partial_q u_i-\left\{{p \atop qi}\right\}u_p\right)-\left\{{q \atop ki}\right\}\left(\partial_j u_q-\left\{{p \atop jq}\right\}u_p\right)$$

可见

$$\nabla_k\nabla_j u_i-\nabla_j\nabla_k u_i=-R_{kji}{}^pu_p \tag{23.9}$$

对于 (1,2) 阶张量场 $T=T_{ji}{}^h dx^j\otimes dx^i\otimes\frac{\partial}{\partial x^h}$，用与上面相同的运算可得

$$\nabla_l\nabla_k T_{ji}{}^h-\nabla_k\nabla_l T_{ji}{}^h=R_{lkp}{}^hT_{ji}{}^p-R_{lkj}{}^pT_{pi}{}^h-R_{lki}{}^pT_{jp}{}^h \tag{23.10}$$

(23.10)可推广到任意(p, q)阶张量场上去.(23.8)(23.9)(23.10)，……叫做**利齐公式。**

适用利齐公式于度量张量 g_{ji} 上，运用 $\nabla_k g_{ji}=0$ 得

$$\nabla_l\nabla_k g_{ji}-\nabla_k\nabla_l g_{ji}=-R_{klj}{}^pg_{pi}-R_{kli}{}^pg_{jp}$$

$$0=-R_{klji}-R_{klij}$$

$$\therefore\quad R_{klji}=-R_{klij} \tag{23.11}$$

曲率张量的性质 注意 (23.5)，(23.7) 以及 (23.11) 可得下列公式。

公式

$$R_{kjih}=-R_{jkih},\quad R_{kjih}=-R_{kjhi} \tag{23.12}$$

$$R_{kjih}=R_{ihkj} \tag{23.13}$$

$$R_{kjih}+R_{jikh}+R_{ikjh}=0 \tag{23.14}$$

与上述(23.14) 等价的公式

$$R_{kji}{}^h+R_{jik}{}^h+R_{ikj}{}^h=0 \tag{23.15}$$

成立。

比安基公(恒等)式

$$\nabla_l R_{kji}{}^h + \nabla_k R_{jli}{}^h + \nabla_j R_{lki}{}^h = 0 \qquad (23.16)$$

〈**证明**〉 关于以任意点 P 为中心的测地坐标系$(x^1,\cdots,x^n)$，

$$(\nabla_l R_{kji}{}^h)_P = (\partial_l R_{kji}{}^h)_P = \left(\partial_l \partial_k \left\{ {h \atop ji} \right\}\right)_P - \left(\partial_l \partial_j \left\{ {h \atop ki} \right\}\right)_P$$

运用此式可得

$$(\nabla_l R_{kji}{}^h + \nabla_k R_{jli}{}^h + \nabla_j R_{lki}{}^h)_P = 0$$

因 P 是任意点，故(23.16)成立。 (证毕)

利齐张量与数量曲率 今考虑以

$$R_{ji} = R_{pji}{}^p = R_{pjiq} g^{pq} \qquad (23.17)$$

为分量的(0, 2)阶张量，叫做**利齐张量**。用符号 Ric 表示。

【问题 23.1】 试证利齐张量 Ric 是对称的。C^∞ 函数

$$k = R_{ji} g^{ji} = R_{kjih} g^{hk} g^{ji} \qquad (23.18)$$

叫做**数量曲率**。

【问题 23.2】 运用比安基公式证明下式。

(1) $\nabla_k R_{ji} - \nabla_j R_{ki} = \nabla_m R_{kji}{}^m$

(2) $\nabla_l k = 2(\nabla_p R_{lq}) g^{pq}$

【问题 23.3】 试证下列事实。

(1) 如果 $\nabla R = 0$，则 $\nabla \mathrm{Ric} = 0$，$\nabla k = 0$。

当 $\nabla R = 0$ 时，数量曲率 k 一定。

(2) 如果 $\nabla \mathrm{Ric} = 0$，则数量曲率 k 一定。

二维黎曼空间的曲率 今特别设 (M, g) 为二维黎曼空间。从(23.12)与(23.13)可知：在 R_{kjih} 里，除

$$R_{1212} = -R_{2112} = -R_{1221} = R_{2121}$$

以外的全恒等于 0．故模仿曲面的全曲率公式(13.16)，令

$$K = -\frac{R_{1212}}{g}, \quad g = \det(g_{ji}) \qquad (23.19)$$

此 K 叫做二维黎曼空间(M, g)的**曲率**，再来考虑以

$$H_{kjih}=g_{kh}g_{ji}-g_{jh}g_{ki}$$

为分量的(0, 4)阶张量场H，则 H_{kjih} 全部满足曲率张量的分量 R_{kjih} 所具备的性质(23.12)～(23.14)。故存在 C^∞ 函数 α 使得

$$R_{kjih}=\alpha H_{kjih}$$

于式中令 $k=i=1$, $h=j=2$, 运用(23.19)得 $\alpha=K$, 故

$$R_{kjih}=K(g_{kh}g_{ji}-g_{jh}g_{ki}) \qquad (23.20)$$

成立。整理之得下列定理。

定理 5.6 在二维黎曼空间(M, g)里

$$R_{kjih}=K(g_{kh}g_{ji}-g_{jh}g_{ki})$$

成立。式中K为(M, g)的曲率、M上的 C^∞ 函数。

常曲率空间 n 维黎曼空间(M, g)的曲率张量具有如下形状

$$R_{kjih}=c(g_{kh}g_{ji}-g_{jh}g_{ki}), \quad (c\ 为常数) \qquad (23.21)$$

即 $$R(X, Y)Z=c[(Y, Z)Y-(X, Z)X]$$

时，则(M, g)叫做**曲率为 c 的常曲率空间**。

爱因斯坦空间 设 a 为常数，当 n 维黎曼空间(M, g) 的利齐张量 Ric 具有

$$R_{ji}=ag_{ji} \quad 即 \quad \mathrm{Ric}(X, Y)=a(X, Y) \qquad (23.22)$$

的形状时，(M, g)叫做**爱因斯坦空间**。

【问题 23.4】 试证以下性质。

(1) 设 n 维常曲率空间(M, g)的曲率为 a, 则(M, g)为爱因斯坦空间，$R_{ji}=(n-1)ag_{ji}$。

(2) 此常曲率空间(M, g)的数量曲率 k 一定，$k=n(n-1)a$。

定理 5.7 (**Schur**) 设 n 维黎曼空间(M, g)的曲率张量具有如下形状

$$R_{kjih}=f(g_{kh}g_{ji}-g_{jh}g_{ki})$$

其中 f 为 C^∞ 函数。这时，如果 $n\geqslant 3$, 则(M,g)为常曲率空间(即 f 为常数)。但设M是连通的。

【问题 23.5】 运用比安基公式(23.16)，证明上述定理 5.7。

例 23.1 人们知道在 $(n+1)$ 维欧氏空间 E^{n+1} 里，半径为 a 的

球面

$$S^n=\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\mid(x^1)^2+\cdots+(x^{n+1})^2=a^2\}$$

是曲率为$\frac{1}{a^2}$的常曲率空间。

例 23.2 欧氏空间 E^n 是曲率为 0 的常曲率空间。

§24 平移 展开

在 n 维黎曼空间 (M,g) 里有正则曲线 $c:I\to M$，对于 c 上各点 $c(t)$ $(t\in I)$，有点 $c(t)$处的切向量 $v(t)\in T_{c(t)}(M)$ 与之对应时，考虑对应 $v:c(t)\mapsto v(t)$。在包含点 $c(t)$的坐标邻域O里，$v(t)$可写如

$$v(t)=v^h(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^h}\right)_{c(t)}.$$

如果 $v^h(t)$ $(h=1,\cdots,n)$在区间 I 上是 C^∞ 函数，则对应 v 叫做沿曲线 c 的**向量场**。这时，$v^h(t)$叫做 v 在邻域O里的**分量**.有时也写做 $v_{c(t)}=v(t)$。

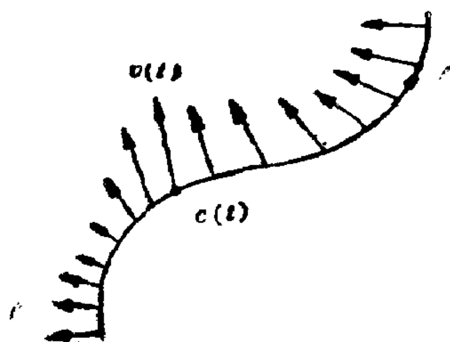


图 5.1

当给定M上的向量场$X:P\mapsto X_P$ $(P\in M)$时，对应X：$c(t)\to X_{c(t)}$ 是沿曲线 c 的向量场。这是向量场X在曲线 c 上的**限制**。

当给定沿曲线 c 的向量场v 时，设 c 在坐标邻域O里的局部表示为$x^h=x^h(t)$。令

$$(\nabla_{\dot c}v)_{c(t)}=\frac{\delta v^h(t)}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^h}\right)_{c(t)} \tag{24.1}$$

但

$$\frac{\delta v^h(t)}{dt}=\frac{dv^h(t)}{dt}+\left\{ {h \atop ji} \right\}_{c(t)}\frac{dx^j(t)}{dt}v^i(t)$$

则$\nabla_{\dot c}v$ 沿曲线 c 是向量场，叫做 v **沿曲线 c 的共变微分**.上列第二式有

时也记做

$$\frac{\delta v}{dt}=\nabla_{\dot{c}}v$$

完全相同，可沿曲线 c 定义张量场 S，定义 S 沿曲线 c 的共变微分：

$$\frac{\delta S}{dt}=\nabla_{\dot{c}}S.$$

又 M 上的张量场在曲线 c 上的限制 v 也可一样定义.

设 M 上的向量场 X 在曲线 c 上的限制为 v，则

$$(\nabla_{\dot{c}}v)_{c(t)}=\frac{dx^j(t)}{dt}(\nabla_j X^h)_{c(t)}\left(\frac{\partial}{\partial x^h}\right)_{c(t)}$$

成立。沿着曲线 c 右边略记为

$$\frac{\delta X}{dt}=\nabla_{\dot{c}}X=\frac{dx^j}{dt}\nabla_j X^h\frac{\partial}{\partial x^h}, \tag{24.2}$$

这时用符号 $\delta X/dt$ 或 $\nabla_{\dot{c}}X$ 表示 $\nabla_{\dot{c}}v$。此 $\nabla_{\dot{c}}X$ 叫做向量场 X **沿曲线 c 的共变微分**。同理定义 M 上的张量场 S 沿曲线 c 的共变微分.

当 M 上的张量场 S 满足 $\nabla_{\dot{c}}S=0$ 时，就说 S 沿曲线 c **平行**。故沿曲线 c 的向量场 v 满足 $\nabla_{\dot{c}}v=0$ 时，就说 v 是**平行**的。

因为度量张量 g 满足 $\nabla g=0$，所以对于任意 C^∞ 曲线 c，

$$\nabla_{\dot{c}}g=0$$

即 g 沿任意 C^∞ 曲线 c 是平行的。

【问题 24.1】 设 v 与 w 是沿曲线 $c:I\to M$ 的向量场，则它们的内积 $(v,\ w)$ 沿 c 是 C^∞ 函数，试证下列事实。

(1) $\nabla_{\dot{c}}(v,\ w)=(\nabla_{\dot{c}}v,\ w)+(v,\ \nabla_{\dot{c}}w)$，（运用 $\nabla_{\dot{c}}g=0$）

(2) 如果 v 平行，那末 $\|v\|$ 一定。

(3) 如果 v 与 w 平行，那末内积一定，v 与 w 的夹角一定。

(4) 设 v 与 w 平行。这时，如果对于某个 $t_0(\in I)$，$v(t_0)$ 与 $w(t_0)$ 是线性无关的，那末对于任意的 $t(\in I)$，$v(t)$ 与 $w(t)$ 线性无关。

【问题 24.2】 黎曼空间 $(M,\ g)$ 上的向量场 X 为平行向量场的充要条件是 X 沿所有的 C^∞ 曲线 c 平行，即 $\nabla_{\dot{c}}X=0$。试证明之。

测地线　曲线的曲率　当给定 n 维黎曼空间(M,g)上的正则曲线 $c:I\to M$时，其切向量$\dot{c}$ 是沿 c 的向量场。当 $\dot{c}/\|\dot{c}\|$平行时，即

$$\nabla_{\dot{c}}\dot{c}=\alpha\dot{c} \tag{24.3}$$

（α 为区间 I 上的 C^∞ 函数）时，c 叫做**测地线**。在测地线 c 上以弧长为参数 s 时，其切向量记以 c'，因为$\|c'\|=1$，所以从(24.3) 可得

$$\nabla_{c'}c'=0 \tag{24.4}$$

反之，对某 C^∞ 曲线 c，如果(24.4)与$\|c'\|=1$成立，则 c 为测地线，其参数为弧长 s。

设曲线 c 的局部表示为 $x^h=x^h(t)$，由(24.3)可见，c 为测地线的充要条件为

$$\frac{d^2x^h}{dt^2}+\left\{{h \atop ji}\right\}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt}=\alpha\frac{dx^h}{dt} \tag{24.5}$$

如设曲线 c 的弧长 s 为参数，由(24.4)可见，c 为测地线的充要条件是

$$\frac{d^2x^h}{ds^2}+\left\{{h \atop ji}\right\}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}=0 \tag{24.6}$$

今后有时将(24.5)的左边表示为

$$\frac{\delta^2x^h}{dt^2}=\frac{d^2x^h}{dt^2}+\left\{{h \atop ji}\right\}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt}$$

显然，下列定理成立。

定理 5.8　对于 n 维黎曼空间，定理 3.3 成立。

【问题 24.3】　导出测地线的方程(24.5)与(24.6)。

曲线的曲率　设 n 维黎曼空间(M,g)上的正则曲线 c 的参数为弧长 s，这时

$$\kappa=\|\nabla_{c'}c'\| \tag{24.7}$$

叫做曲线 c 的**曲率**或**第一曲率**，以左边的符号表示。在 $n\geqslant3$ 的情况下，用此曲率的定义者居多数。沿 c 的向量场

$$k=\nabla_{c'}c' \tag{24.8}$$

叫做曲线 c 的**曲率向量**。显然下列定理成立。

定理 5.9　n 维黎曼空间里的正则曲线为测地线的充要条件是其

第一曲率 κ 恒等于 0。

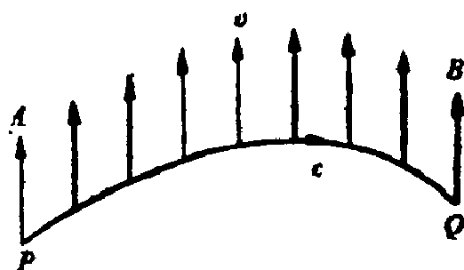


图 5.2

平移 在 n 维黎曼空间 (M, g) 的一坐标邻域 O 里考虑 C^∞ 曲线 $c:[a, b]\to M$，设其局部表示为 $x^h = x^h(t)$。设 c 的端点为 $P = c(a), Q = c(b)$。今考虑常微分方程

$$\frac{dv^h}{dt} + \left\{ {h \atop ji} \right\} \frac{dx^j}{dt} v^i = 0 \qquad (24.9)$$

任意取点 P 处的切向量 A，设 A 的分量为 A^h。因为常微分方程(24.9)的解 $v^h(t)$满足初始条件 $v^h(a) = A^h$ 的只存在一个。故沿曲线 c，作向量场 v 为

$$v(t) = v^h(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^h}\right)_{c(t)}$$

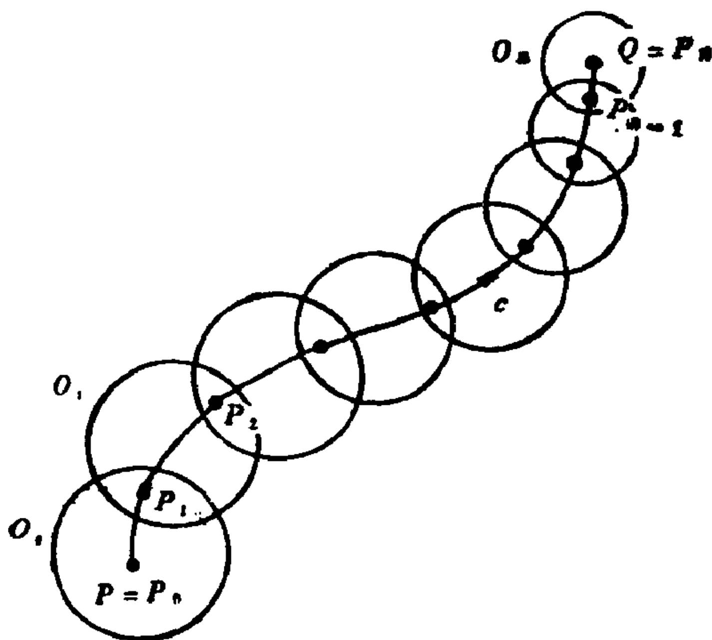


图 5.3

则 $v(t)$沿 c 平行。这时我们说将 A 沿 c **平移**而得 $v(t)$。$v(b) = B$ 是点 Q 处的切向量。故考虑对应 $\Pi_c: A \mapsto B$，则得下列映射。

$$\Pi_c: T_P(M) \to T_Q(M)$$

因(24.9)是线性微分方程，故 Π_c 是线性映射。根据〔问题 24.1〕(4)可见 Π_c 是同构映射(运用下页 (24.11)。此同构映射 $\Pi_c: T_P(M) \to T_Q(M)$ 叫做沿曲线 c 的**平移**。

当 C^∞ 曲线 c 没包含在一个坐标邻域内时，因象 $c([a,b])$ 是紧

致的，故存在有限个坐标邻域 O_0，O_1，…，O_n使曲线 c 包含在

$$O_0 \cup O_1 \cup \cdots \cup O_n$$

里，在 $O_i \cap O_{i+1}$ 里适当地取一点$P_i(i=1, \cdots, n-1)$，设 $P_0=P$，$P_n=Q$，将弧 $c_1=\widehat{P_0P_1}$，$c_2=\widehat{P_1P_2}$，…，$c_n=\widehat{P_{n-1}P_n}$ 按这种顺序连结之可得 c。这时

$$\Pi_c=\Pi_{c_n}\circ\Pi_{c_{n-1}}\circ\cdots\circ\Pi_{c}:T_P(M)\to T_Q(M) \qquad (24.10)$$

是同构映射，与 c 的分割无关而决定（运用常微分方程的解的唯一性定理）。此 Π_c 叫做沿曲线 c 的**平移**。

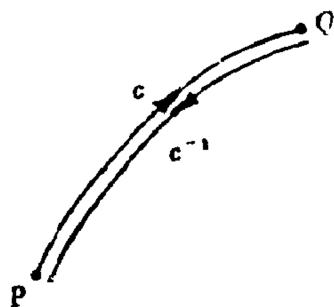


图 5.4

对于 C^∞ 曲线 $c:[a, b]\to M$，定义 C^∞ 曲线$c^{-1}:[a, b]\to M$ 为 [1]

$$c^{-1}(t)=c(-t+a+b)$$

我们说，逆转 c 的方向而得 c^{-1}。这时

$$\Pi_{c^{-1}}:T_Q(M)\to T_P(M)$$

是 Π_c 的逆映射。即

$$\Pi_{c^{-1}}=\Pi_c^{-1} \qquad (24.11)$$

将有限个 C^∞ 曲线 c_1，c_2，…，c_s 连结起来而得的曲线 c 叫做**分段 C^∞ 曲线**。也叫做**D^∞ 曲线**。设 D^∞ 曲线 c 的两端点为 P,Q 时，

$$\Pi_c=\Pi_{c_s}\circ\cdots\circ\Pi_{c_2}\circ\Pi_{c}:T_P(M)\to T_Q(M)$$

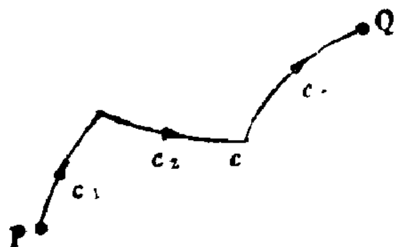


图 5.5

为**同构映射**。此 Π_c 叫做沿曲线 c 的**平移**。此外，从〔问题 24.1〕(2) 可见，**Π_c 是保内积的同构映射**，即**度量同构映射**。

当二个 D^∞ 曲线 c_1 与 c_2 能够连结时，连结而得的D^∞曲线用 c_1c_2 表示，显然下式成立 [2]。

$$\Pi_{c_1c_2}=\Pi_{c_1}\circ\Pi_{c_2} \qquad (24.12)$$

---

1) 原书为 $c(-t+a-b)$。（译者注）

2) 下式右边应该是 $\Pi_{c_2}\circ\Pi_{c_1}$。

对于连结二点P，Q的两条D^∞曲线c_1与c_2，平移

$$\Pi_{c_1}: T_P(M) \to T_Q(M), \qquad \Pi_{c_2}: T_P(M) \to T_Q(M)$$

不一定一致，一般是不同的。这由下例 24.1 可见。

展开 为简化叙述，就二维黎曼空间(M, g)讨论之。设M上的C^∞曲线$c: I \to M$的参数为弧长s。又在c上取一点P_0（设在P_0，$s=0$）。在点P_0取互相正交的单位向量a_1, a_2，设将a_1与a_2沿c平移而得的向量场分别为e_1与e_2。从〔问题 24.1〕的结果可见e_1与e_2在c上各点是互相正交的单位向量。再说，因为c的单位切向量c'在c的各点可用e_1与e_2的线性组合表示，故可令

$$c' = t_1 e_1 + t_2 e_2, \quad (t_1)^2 + (t_2)^2 = 1 \qquad (24.13)$$

式中t_1与t_2为弧长s的C^∞函数。其次在欧氏平面E^2上取直角坐标系(y_1, y_2)，设$\bar{e}_1$与$\bar{e}_2$分别为以(1,0)，(0,1)为分量的互相垂直的单位向量．设微分方程

$$\frac{dy_1}{ds} = t_1(s), \quad \frac{dy_2}{ds} = t_2(s) \qquad (24.14)$$

的解满足初始条件

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0$$

者为$y_1(s)$与$y_2(s)$。在E^2里作出方程为

$$y_1 = y_1(s), \quad y_2 = y_2(s), \quad (s \in I) \qquad (24.15)$$

的曲线$\bar{c}$。当$s=0$时，$\bar{c}$通过E^2的原点O。又因

$$\bar{c}' = y_1' \bar{e}_1 + y_2' \bar{e}_2, (y_1')^2 + (y_2')^2 = (t_1)^2 + (t_2)^2 = 1 \quad (24.16)$$

故参数s为$\bar{c}$的弧长。此$\bar{c}$叫做给定曲线c在点P_0处的**展开曲线**（参照图 5.6）．因为

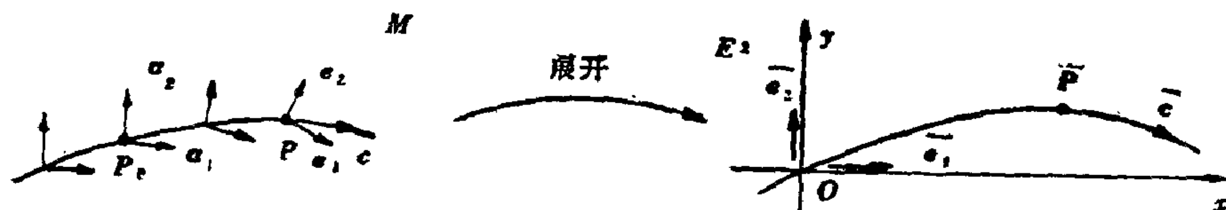


图 5.6

e_1, e_2 垂直 | $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ 一定

故将

(24.13) | (24.16)

的第一式两边对 s 微分之，则曲率向量由下式决定。

$$k = \nabla_{c'}c' = t_1' e_1 + t_2' e_2 \quad \Big| \quad \bar{k} = \partial_{\bar{c}'}\bar{c}' = t_1'\bar{e}_1 + t_2'\bar{e}_2 \tag{24.17}$$

当沿着 c 给定向量场 v 时，于是可以写做

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2$$

相应的，沿 $\bar{c}$ 在 E^2 里的向量场是

$$\bar{v} = v_1\bar{e}_1 + v_2\bar{e}_2$$

我们说 $\bar{v}$ 是 v 的**展开**(参照图 5.6)，特别当 v 平行时，v_1，v_2 是常数，故 $\bar{v}$ 在 E^2 内平行。这时从(24.17)可见，将 c 的曲率向量 k 展开之，可得 $\bar{c}$ 的曲率向量 $\bar{k}$. 因此，显然以下事实成立。

(M, g) 上的曲线 c 为测地线的充要条件是：在 c 上一点处 c 的展开曲线为直线。

沿曲线 c 的向量场 v 平行的充要条件是：v 的展开 $\bar{v}$ 沿 c 的展开曲线 $\bar{c}$ （在 E^2 里）平行。

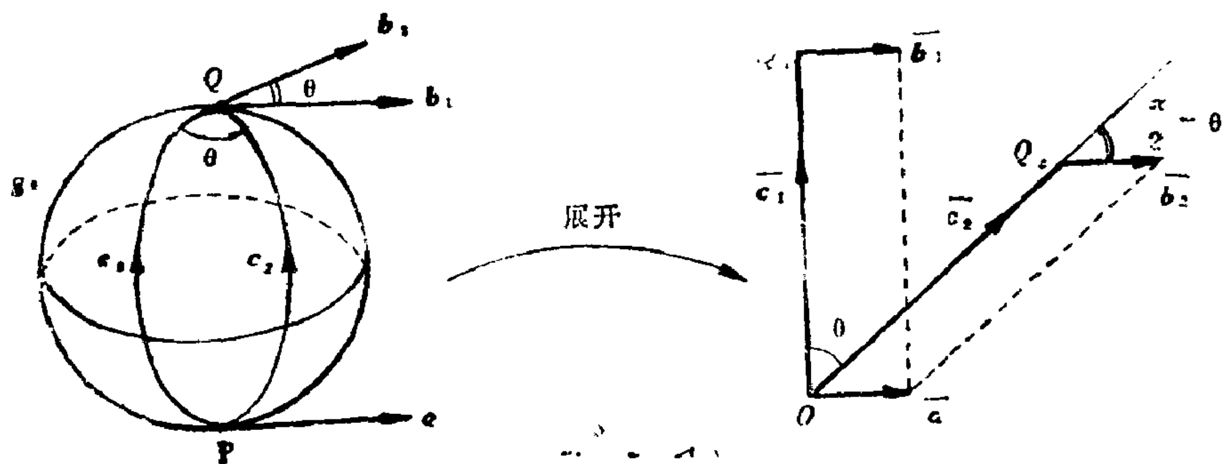


图 5.7

例 24.1 考虑球面 S^2 上的一点 P 与其对径点 Q 相连结而得两条半大圆 c_1 与 c_2，如图 5.7 所示. c_1 与 c_2 的展开曲线分别为直线 $\bar{c}_1$ 与

$\bar{c}_2$，如右图所示。由此事实可见，在 S^2 上连结两点 P 与 Q 的二曲线 c_1，c_2 在 P 处的展开曲线的终点并不一致。

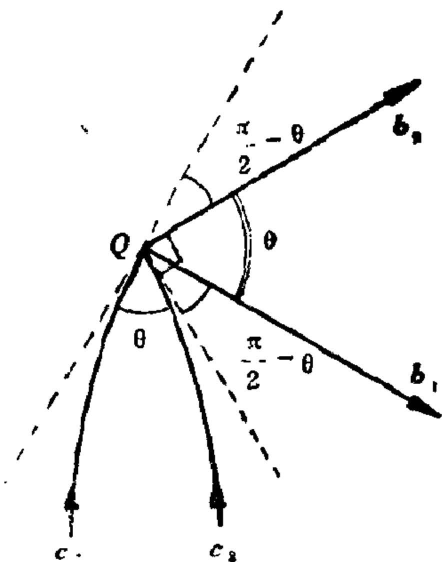


图 5.8

其次，假设将 P 处的与 c_1 垂直的向量 $\boldsymbol{a}$ 沿 c_1 平移到 Q 得 $\boldsymbol{b}_1$，将 $\boldsymbol{a}$ 沿 c_2 平移到 Q 得 $\boldsymbol{b}_2$，则在展开图里分别与 $\boldsymbol{b}_1$ 与 $\boldsymbol{b}_2$ 相对应的向量为 $\bar{\boldsymbol{b}}_1$ 与 $\bar{\boldsymbol{b}}_2$。由图 5.8 可见，$\boldsymbol{b}_1$ 与 $\boldsymbol{b}_2$ 的夹角为 θ（已假设在点 P，c_1 与 c_2 的夹角为 θ）。由此可得下列结论：过 S^2 上两点 P，Q 连结两条曲线 c_1 与 c_2，沿此二曲线，将 P 处的向量平移到 Q。一般地说，结果不同。

§25 测 地 坐 标

在本节就二维黎曼空间(M, g)讨论。设在二维黎曼空间(M, g)的坐标邻域 O 里的坐标系为(u, v)。并设坐标曲线即 u 曲线（v = 常数）与 v 曲线（u = 常数）互相垂直，而且 u 曲线全是测地线，这时，坐标系(u, v)叫做 O 里的**测地坐标**，以下说明可以作出测地坐标（参照定理 5.10)。

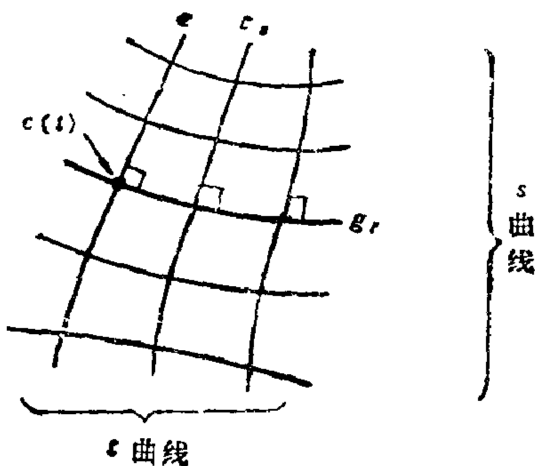


图 5.9

设在(M, g) 的坐标邻域 O 里局部坐标为 (u^1, u^2)。首先取正则曲线 $c:[a,b]\to O$，设其局部表示为 $u^h=u_0^h(t)\,(t\in[a,b])$。通过 c 的各点 $c(t)$，作与 c 垂直的测地线

g_t，取弧长 s 为参数，设 $g_t(0)=c(t)$．设 g_t 的局部表示为 $u=u(s,t)$，$v=v(s,t)$。此式右边的函数为变数(s, t)的 C^∞ 函数（测地线的微分方程(24.6)的解是自变量 s 与初始条件 $u_0^h(t)$的 C^∞ 函数）．固定 s，由方程 $u=u(s,t)$，$v=v(s,t)$定义的曲线以 c_s 表示之，则$c=c_0$。在任意点 $(u^1(s, t), u^2(s, t))$，因为

$$\nabla_{g_t'}\dot{c}_s=\left(\frac{\partial^2 u^h}{\partial s\partial t}+\left\{\begin{matrix}h\\ ji\end{matrix}\right\}\frac{\partial u^j}{\partial s}\frac{\partial u^i}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial u^h}$$

$$\nabla_{\dot{c}_s}g_t'=\left(\frac{\partial^2 u^h}{\partial t\partial s}+\left\{\begin{matrix}h\\ ji\end{matrix}\right\}\frac{\partial u^j}{\partial t}\frac{\partial u^i}{\partial s}\right)\frac{\partial}{\partial u^h}$$

故
$$\nabla_{g_t'}\dot{c}_s=\nabla_{\dot{c}_s}g_t' \tag{25.1}$$

以下令

$$F(s,t)=(g_t',\ \dot{c}_s) \tag{25.2}$$

（右边表示内积），运用(25.1)得

$$\frac{\partial F}{\partial s}=(\nabla_{g_t'}g_t',\dot{c}_s)+(g_t',\ \nabla_{g_t'}\dot{c}_s)=(g_t',\ \nabla_{\dot{c}_s}g_t')$$

式中运用了 $\nabla_{g_t'}g_t'=0$（因 g_t 为测地线）．又因$(g_t', g_t')=\|g_t'\|^2=1$，两边对 s 微分之得

$$(g_t',\ \nabla_{\dot{c}_s}g_t')=0,\qquad \therefore\quad \frac{\partial F}{\partial s}=0 \tag{25.3}$$

然因当 $s=0$（即在 $c=c_0$ 上）时 $\dot{c}$ 与 g_t 正交，故 $F(0,t)=0$．从而由(25.3)得 $F(s, t)=0$。这说明在各点$(u^1(s, t),u^2(s, t))$，$\dot{c}_s$ 与 g_t 正交。

再来证明下列事实：设 ε 为充分小正数，在范围 $-\varepsilon<s<\varepsilon$，$a<t<b$ 里，关于

$$u^1=u^1(s,\ t),\quad u^2=u^2(s,\ t)$$

$$\frac{\partial(u^1,\ u^2)}{\partial(s,\ t)}\neq 0,\quad (-\varepsilon<s<\varepsilon,\ a\leqslant t\leqslant b) \tag{25.4}$$

〈**证明**〉 因 g_t 为测地线，故任意固定 t，则 $u^h=u^h(s,\ t)$为测地线的方程(24.6)的解，又满足初始条件

$$u^h(0,\ t)=u_0^h(t),\ \frac{\partial u^h(0,t)}{\partial s}=\xi^h(t)$$

但 C^∞ 函数 $\xi^h(t)$ 为测地线 g_t 在点 $c(t)$ 的切向量的分量，故在点 $c(t)$

$$\dot{c}(t)=\frac{du_0^h(t)}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial u^h}\right)_{c(t)},\quad \xi(t)=\xi^h(t)\left(\frac{\partial}{\partial u^h}\right)_{c(t)}$$

正交，$\|\dot{c}(t)\|\neq 0$，$\|\xi(t)\|=1$。因此，运用初始条件[1)]

$$\begin{vmatrix}\xi^1(t) & du_0^1(t)/dt\\ \xi^2(t) & du_0^2(t)/dt\end{vmatrix}\neq 0$$

可见，上式在点 $c(t)$ 是

$$\left(\frac{\partial(u^1,u^2)}{\partial(s,t)}\right)_{c(t)}\neq 0,\ (a\leqslant t\leqslant b)$$

故存在正数 ε，下式成立

$$\frac{\partial(u^1,u^2)}{\partial(s,t)}\neq 0,\ (-\varepsilon<s<\varepsilon,\ a\leqslant t\leqslant b)\qquad \text{（证毕）}$$

由(25.2)定义的 $F(s,\ t)$ 恒等于 0 以及(25.4)成立可见，下列定理成立。

定理 5.10 对于二维黎曼空间 $(M,\ g)$ 的各点 P，如取包含 P 的充分小邻域 O，则在 O 内存在测地坐标。

---

1) 原因是：

设 $(\xi^1,\ \xi^2)$，$(\eta^1,\ \eta^2)$ 是非零正交向量，则

$$\begin{vmatrix}\xi^1 & \eta^1\\ \xi^2 & \eta^2\end{vmatrix}\neq 0$$

用反证法证明。设论断不真，则

$$\xi^1\eta^2=\xi^2\eta^1 \tag{i}$$

因 $(\xi^1,\ \xi^2)$ 为非零向量，可设 $\xi^2\neq 0$。这时 $\eta^2\neq 0$，否则由(i)得 $\eta^1=0$。与假设矛盾。

由二向量正交可见

$$E\xi^1\eta^1+F(\xi^1\eta^2+\xi^2\eta^1)+G\xi^2\eta^2=0 \tag{ii}$$

(ii)的两边乘以 ξ^2，运用(i)得

$$E\xi^1\xi^1\eta^2+2F\xi^1\eta^2\xi^2+G\xi^2\xi^2\eta^2=0$$

即
$$E(\xi^1)^2+2F\xi^1\xi^2+G(\xi^2)^2=0$$

$\therefore\ \frac{\xi^1}{\xi^2}$ 为上方程的实根，故 $F^2-EG>0$。这和矩阵 (g_{ji}) 正定矛盾。（译者注）

《**注意**》 一般地说，此定理 5.10 对于 n 维黎曼空间也成立(但有必要适当地推广测地坐标)。

在坐标邻域 O 里的测地坐标(u, v)下，设 u 曲线 (v = 常数)是测地线，于其上设参数 u 为弧长，则在 O 里线素为

$$ds^2 = du^2 + G(u,v)dv^2 \quad (G(u,v)>0) \qquad (25.5)$$

在这里提一下，在曲面论里求到的全曲率 K 的公式(13.17) 在二维黎曼空间里也成立，故得：关于测地坐标(u,v)，(M,g) 的曲率 K 由下式而定 1) (运用(25.5))。

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} \qquad (25.6)$$

曲线族 对于区间 $\bar{I}$ 的所有实数 t，定义了(M,g)上的C^∞曲线g_t，设在各坐标邻域 O 里，g_t 的局部表示为 $u^h = u^h(s, t)$ (s 为 g_t 的弧长，$s \in I$)。当函数 $u^h(s,t)$为二变数 $(s, t) \in I \times \bar{I}$ 的C^∞函数，(25.4)成立时，就说 g_t $(t \in \bar{I})$ 定义**曲线族**。

定理 5.11 假设在二维黎曼空间 (M, g)上，有测地线族 g_t，$(t \in \bar{I})$，两条正则曲线 c_1，c_2：$I \to M$与各测地线 g_t 分别交于点$c_1(t)$与 $c_2(t)$，而且设 g_t 与 c_1 在点 $c_1(t)$ 正交，又设 g_t 与 c_2 在点 $c_2(t)$ 正交。这时，在测地线 g_t 上，二点 $c_1(t)$，$c_2(t)$ 之间的弧长与 t 无关，是一定的。

〈**证明**〉 在充分小坐标邻域 O 里存在 g_t 为 s 曲线的测地坐标

---

1) 原因是：K 仅由度量及其偏导数而定。但只用本章黎曼空间的概念也可求之如下。在目前情况下由(23, 19)得 $K = -R_{2121}/g = -R_{212}{}^1/g$。又因

$$\left\{ {1 \atop 22} \right\} = -\frac{1}{2} G_u, \quad \left\{ {2 \atop 22} \right\} = \frac{1}{2G} G_u, \quad \left\{ {2 \atop 12} \right\} = \left\{ {2 \atop 21} \right\} = \frac{1}{2G} G_u$$

其它克氏符号都是 0。再来计算 $R_{212}{}^1$。

$$R_{212}{}^1 = \partial_2 \left\{ {1 \atop 12} \right\} - \partial_1 \left\{ {1 \atop 22} \right\} + \left\{ {1 \atop 2a} \right\} \left\{ {a \atop 12} \right\} - \left\{ {1 \atop 1a} \right\} \left\{ {a \atop 22} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} G_{uu} - \frac{G_u}{2G} \cdot \frac{G_u}{2}$$

$$\therefore \quad K = -\frac{G_{uu}}{2G} + \frac{G_u^2}{4G^2} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$$

(译者注)

(s,t)。如果 c_1 与 c_2 在 O 里，则根据测地坐标下的线素(25.5)，g_t 上两点 $c_1(t)$，$c_2(t)$间的弧长为

$$\int_{s_1}^{s_2} ds = s_2 - s_1$$

是一定的，但设 $g_t(s_1) = c_1(t)$，$g_t(s_2) = c_2(t)$。

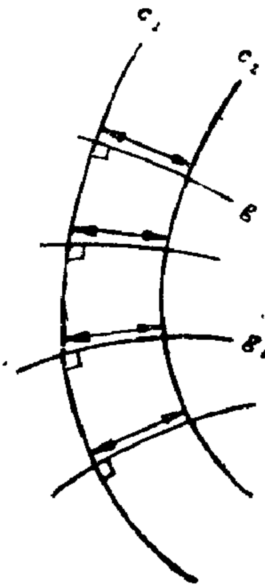


图 5.10

当 c_1 与 c_2 不能包含于象上面那样坐标邻域之内时，将 g_t 用有限个充分小坐标邻域 O_0，O_1，…，O_s 复盖如图 5.11，在各 O_0，…，O_s

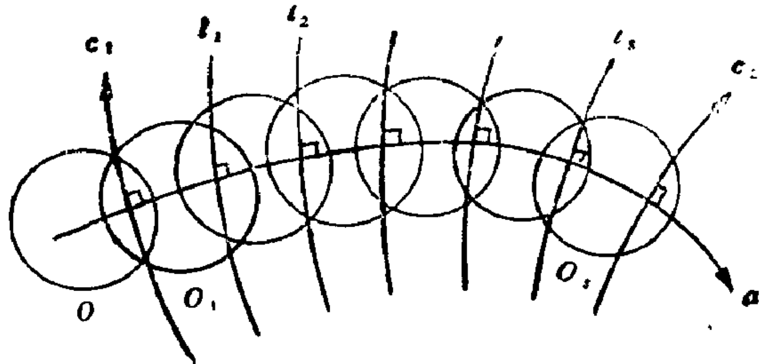


图 5.11

里利用上述测地坐标，在 $O_i \cap O_{i+1}$ 里作 s = 常数的曲线 l_i 。这时，l_i 与 l_{i+1} 的关系与上述 c_1 与 c_2 的关系相同。利用这个事实，可证明定理 5.11.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（证毕）

测地极坐标　在 (M,g) 上任意取点 P。在点 P 取互相垂直的单位向量 e_1, e_2。在点 P 处的切空间 $T_P(M)$ 上，取任意单位向量 $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 (v_1, v_2 \in R)$ 。通过点 P 作测地线 $g_v: (-\delta, \delta) \to M$，使得在



图 5.12

P 与 v 相切。其中 δ 为充分小正数。这时，g_v 的局部表示即 $g_v(s)$ 的坐标可写做 $u^h = u^h(s, \theta)$ 。但设 $v = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$，$0 < s < \delta$。于是得

$$g_v'(0) = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2 \quad (25.7)$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{\partial u^h(s,\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial u^h} = \frac{\partial}{\partial \theta} g_v'(0) = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2$$

其次，任意固定 s，设以 $u^h=u^h(s,\ \theta)$为局部表示的曲线为 c_s，则由上式得

$$\lim_{s\to 0}\dot{c}_s=\lim_{s\to 0}\frac{\partial u^h(s,\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial u^h}=-\sin\theta e_1+\cos\theta e_2 \qquad (25.8)$$

令 $F(s,\ \theta)=(g_v^{\nabla},\ \dot{c}_s)$，根据(25.7)与(25.8)得

$$\lim_{s\to 0}F(s,\ \theta)=0 \qquad (25.9)$$

和证明(25.3)的方法完全一样，可证明 $\partial F/\partial s=0$。故运用 (25.9) 可导出 $F(s,\ \theta)=0$。因此在 $0<s<\delta$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 的范围内，$(s,\ \theta)$为测地坐标。此测地坐标叫做以点 P 为中心的**测地极坐标**。整理一下，可以叙述如次。

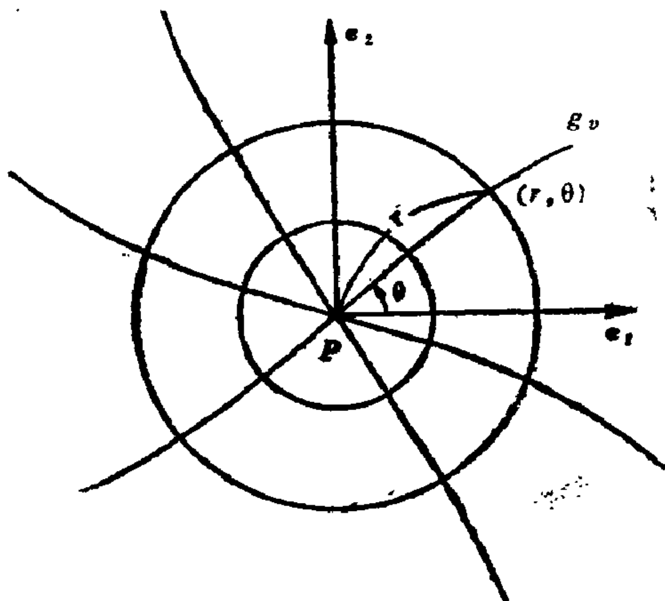


图 5.13

对于$(M,\ g)$ 上各点 P，取包含 P 的充分小邻域O，则在$O-\{P\}$里存在以 P 为中心的测地极坐标 $(r,\ \theta)$，$(0<r<\delta,\ 0<\theta<2\pi)$。式中用 r 代替了 s。关于测地极坐标(r,θ)，线素变为

$$ds^2=dr^2+G(r,\ \theta)d\theta^2 \qquad (25.10)$$

（与(25.5)相同）。

《**注意**》 测地极坐标$(r,\ \theta)$在 $r=0$ 的地点，不是二维流形M的局部坐标。

例 25.1 (1) 把 E^2 看做黎曼空间时，在平面 E^2 上普通含义下的极坐标$(r,\ \theta)$是以原点O为中心的测地极坐标，在整个 $E^2-\{O\}$ 上有定义，如所周知其线素是

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2$$

(2) 在E^3里半径为a的球面S^2以

$$x = a\cos\theta\sin\frac{r}{a}$$

$$y = a\sin\theta\sin\frac{r}{a} \qquad \begin{matrix}(a>0)\\(0<r<\pi a)\end{matrix}$$

$$z = a\cos\frac{r}{a}$$

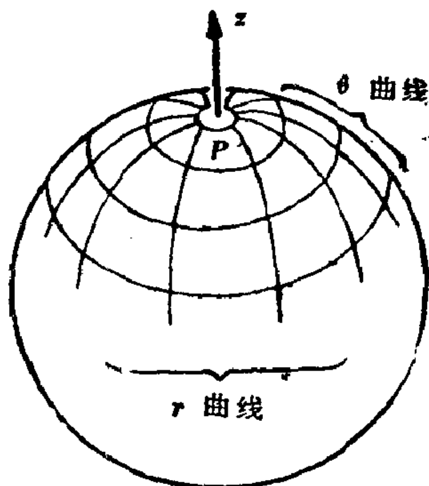


图 5.14

表示，则以点$P(0,0,a)$为中心的测地极坐标可定义在$S^2-\{P, Q\}$（Q为P的对径点）内。这时，线素可由下式决定

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad \therefore \quad ds^2 = dr^2 + a^2\sin^2\frac{r}{a}\,d\theta^2$$

法坐标 设在二维黎曼空间上包含点P的邻域O里，定义着以P为中心的测地极坐标(r, θ)。任意取O内的点Q。当$Q \neq P$时，设Q的测地极坐标为(r, θ)，令

$$x^1(Q) = r\cos\theta, \quad x^2(Q) = r\sin\theta$$

当$Q = P$时，令

$$x^1(P) = 0, \quad x^2(P) = 0$$

这样，在O内导入坐标系（x^1, x^2）。此坐标系叫做以P为中心的**法坐标**。但如下所示，一次方程(25.11) 是通过点P的测地线。运用这个事实，可以证明（x^1, x^2）在O内是局部坐标，但其证明从略。

关于法坐标（x^1, x^2），显然，通过其中心P的测地线可用一次方程

$$x^1 = a^1 s, \quad x^2 = a^2 s, \quad ((a^1)^2 + (a^2)^2 = 1) \qquad (25.11)$$

表示。式中s为各测地线(25.11)的弧长。将一次方程(25.11)代入测地线的方程(24.6)里，则

$$\left\{\begin{matrix} h \\ j\,i \end{matrix}\right\} x^j x^i = 0 \qquad (25.12)$$

成立。用s^2除(25.12)的两边，取极限$s \to 0$，得

$$\left\{ {h \atop ji} \right\}_P a^j a^i = 0, \quad \therefore \quad \left\{ {h \atop ji} \right\}_P = 0 \qquad (25.13)$$

（因(a^1, a^2)可任意选择）。即以P为中心的法坐标是以P为中心的测地坐标系（参照§22（p.158））的一种。

定理 5.12 关于以点P为中心的测地极坐标(r, θ)，线素是

$$ds^2 = dr^2 + G(r, \theta)d\theta^2$$

而且

$$\sqrt{G(r, \theta)} = r - \frac{1}{6}K(P)r^3 + R(r,\theta) \qquad (25.14)$$

式中$K(P)$表示曲率K在点P的值，同时

$$\lim_{r\to 0}\frac{R(r,\theta)}{r^3} = 0$$

〈**证明**〉 设以点P为中心的法坐标为(x^1, x^2)，则

$$x^1 = r\cos\theta, \quad x^2 = r\sin\theta$$

设在法坐标(x^1, x^2)下，度量张量的分量为$g_{11} = \overline{E}$，$g_{12} = g_{21} = \overline{F}$，$g_{22} = \overline{G}$，则由$g_{ji}$的变换规律可见，

$$G = \overline{E}\left(\frac{\partial x^1}{\partial\theta}\right)^2 + 2\overline{F}\frac{\partial x^1}{\partial\theta}\frac{\partial x^2}{\partial\theta} + \overline{G}\left(\frac{\partial x^2}{\partial\theta}\right)^2$$

$$\therefore \quad G = r^2(\overline{E}\sin^2\theta - 2\overline{F}\sin\theta\cos\theta + \overline{G}\cos^2\theta) \qquad (25.15)$$

然而在点P，切向量e_1与e_2是正交的单位向量，关于法坐标(x^1, x^2)，e_1与e_2分别具有分量$(1, 0)$与$(0, 1)$。所以在点P

$$\overline{E} = \overline{G} = 1, \quad \overline{F} = 0 \qquad (25.16)$$

又因以P为中心的法坐标是以P为中心的测地坐标，所以(25.13)成立。然而(25.13)与

$$\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}\right)_P = 0$$

等价（参照(11.16)）。故在点P

$$\frac{\partial\overline{E}}{\partial r} = \frac{\partial\overline{E}}{\partial\theta} = \frac{\partial\overline{F}}{\partial r} = \frac{\partial\overline{F}}{\partial\theta} = \frac{\partial\overline{G}}{\partial r} = \frac{\partial\overline{G}}{\partial\theta} = 0 \qquad (25.17)$$

先运用(25.15)，(25.16)以及(25.17)可得

$$\lim_{r\to 0}\sqrt{G}=0,\quad \lim_{r\to 0}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}=1 \tag{25.18}$$

再将(25.6)及其两边微分后得到的方程改写之得

$$\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}=-K\sqrt{G},\quad \frac{\partial^3\sqrt{G}}{\partial r^3}=-K\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}-\frac{\partial K}{\partial r}\sqrt{G}$$

在这里运用 (25.18)得

$$\lim_{r\to 0}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}=0,\quad \lim_{r\to 0}\frac{\partial^3\sqrt{G}}{\partial r^3}=-K(P) \tag{25.19}$$

最后运用(25.18)与(25.19)，将$\sqrt{G}$展开之，得

$$\sqrt{G}=(\sqrt{G})_P+\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\right)_P r+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}\right)_P r^2$$

$$+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3\sqrt{G}}{\partial r^3}\right)_P r^3+R(r,\ \theta)=r-\frac{1}{6}K(P)r^3+R(r,\ \theta)$$

但

$$\lim_{r\to 0}R(r,\ \theta)/r^3=0$$

（证毕）

黎曼圆　关于测地极坐标$(r,\ \theta)$，由方程

$$r=a\qquad (a>0)$$

表示的闭曲线叫做半径为 a 的**黎曼圆**（设 a 充分小）.

运用公式 (25.14)可见，此黎曼圆的周长 $L(a)$ 可用下式求得.

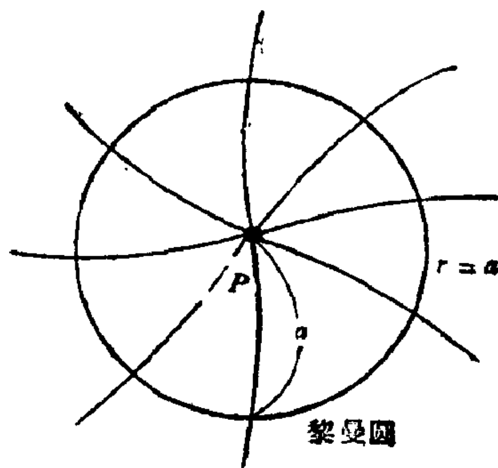


图 5.15

$$L(a)=\int_0^{2\pi}\sqrt{G(r,\theta)}\,d\theta$$

$$=2\pi a-\frac{\pi}{3}K(P)a^3$$

$$+\ (a^3)\tag{25.20}$$

但 $o(a^3)/a^3\to 0\ (a\to 0)$.

此黎曼圆内部的面积 $A(a)$ 可用下式求得.

$$A(a)=\int_0^a\int_0^{2\pi}\sqrt{G}\,d\theta dr=\pi a^2-\frac{\pi}{12}K(P)a^4+o(a^4)\tag{25.21}$$

但 $o(a^4)/a^4 \to 0$，$(a \to 0)$。

于是运用(25.20)与(25.21)，分别可得下列公式。

公式

$$K(P)=\lim_{a\to 0}\frac{3}{\pi}\left(\frac{2\pi a-L(a)}{a^3}\right)$$

$$K(P)=\lim_{a\to 0}\frac{12}{\pi}\left(\frac{\pi a^2-A(a)}{a^4}\right) \tag{25.22}$$

但 $L(a)$ 与 $A(a)$ 分别是以 P 为中心，半径为 a 的黎曼圆的周长以及其内部的面积。(25.22) 指出曲率 K 的一种意义。

短程线 首先指出下列定理成立。

定理 5.13 在二维黎曼空间上，取充分邻近两点 P，Q（在定义了以 P 为中心的测地极坐标的邻域内取 Q）。这时，连结 P 与 Q 的所有正则曲线中弧长最小的即短程线[1]只有一个，这就是测地线。

〈**证明**〉 取以 P 为中心的测地极坐标 $(r,\ \theta)$。这时设 Q 的坐标为 $(r_0,\ \theta_0)$。其次任意取连结 P 与 Q 的正则曲线 $c:[a,\ b]\to M$，设 $P=c(a)$，$Q=c(b)$。在这里考虑两种情况，并加以证明。

(i) c 在黎曼圆 $r=r_0$ 的内部的情况。这时，c 的长可由

$$L(c)=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+G(r,\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}\,dt$$

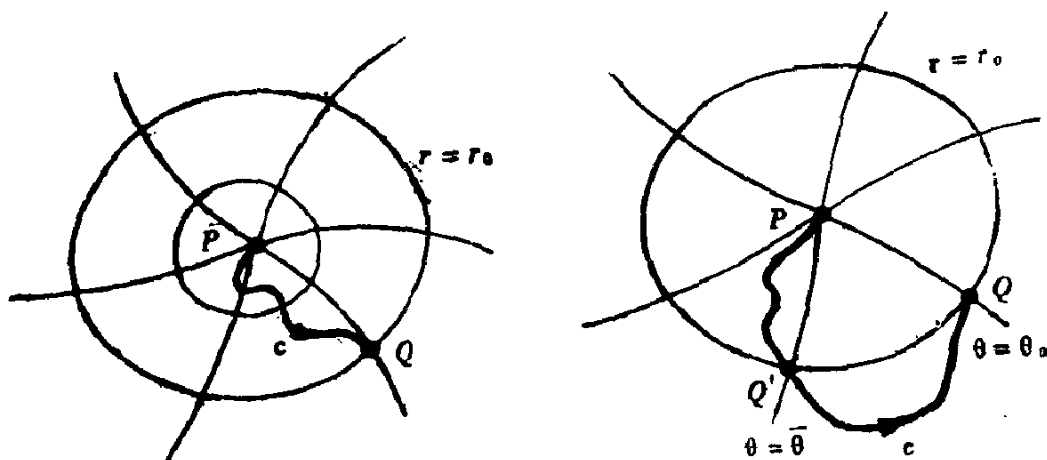


图 5.16

1) 这里所说短程线的定义与测地线不同。（译者注）

决定。但设 c 的局部表示为 $r=r(t)$，$\theta=\theta(t)$，$(a\leqslant t\leqslant b)$。因为$G>0$，所以当 $\theta(t)$ 不是常数时

$$L(c)>\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}\,dt\geqslant\int_a^b\frac{dr}{dt}dt=\int_0^{r_0}dr=r_0$$

然因，由方程 $\theta=\theta_0$ 定义的测地线上的弧 $\widehat{PQ}$ 之长为 r_0，故此测地线的弧 $\widehat{PQ}$ 是连结P与Q的唯一条短程线。

(ii) 当曲线 c 的一部分在黎曼圆之外的情况。设曲线c与黎曼圆的头一个交点为 $Q'(r_0,\ \bar\theta)$，设P与 Q' 间 c 的弧为 $\bar c$，则由(i)的证明可见

$$L(\bar c)\geqslant r_0$$

然而，显然 $L(c)>L(\bar c)$，故得 $L(c)>r_0$。于是得到与(i)所述相同的结论。 （证毕）

定理 5.14 二维黎曼空间$(M,\ g)$上两点 P_1，P_2 以各种正则曲线连结之，其中弧长最短者即短程线为测地线。

〈证明〉 设 $c:[a,b]\to M$，$(c(a)=P_1,\ c(b)=P_2)$为连结 P_1 与 P_2 的短程线。取 c 上的一点 $P=c(t)$。取邻域O，设于其中可定义以P为中心的测地极坐标，设c上的弧 $\widehat{P_{-\varepsilon}P_\varepsilon}$ $(P_{-\varepsilon}=c(t-\varepsilon)$，$P_\varepsilon=c(t+\varepsilon)$，$\varepsilon>0)$ 在O内。再用 c_ε 表示弧 $\widehat{PP_\varepsilon}$。这时，我们来说明 c_ε 为连结P与 P_ε 的短程线。如假设 c_ε 不是连结P与 P_ε 的短程线，则存在连结P与P_ε的正则曲线 $\bar\Gamma_\varepsilon$，使得 $L(\bar\Gamma_\varepsilon)<L(c_\varepsilon)$。故存

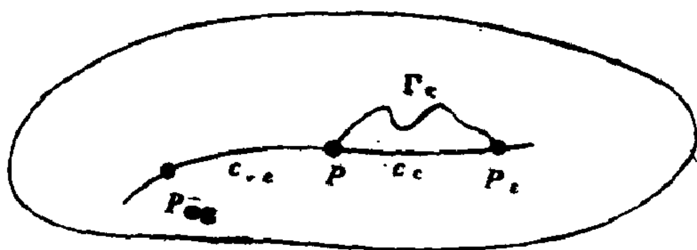


图 5.17

在 $\delta>0$ 满足 $L(\bar\Gamma_\varepsilon)+2\delta\leqslant L(c_\varepsilon)$。在 c 上设用 $\bar\Gamma_\varepsilon$ 代替 c_ε 而得的曲线为$\bar\Gamma$，则 $\bar\Gamma$在点P与 P_ε 不具备 C^∞ 性。但在点P与 P_ε 的附近修整 $\bar\Gamma_\varepsilon$ 的一部分使之光滑，作成正则 C^∞ 曲线 Γ_ε 可使

$$L(\Gamma_\varepsilon)+\delta\leqslant L(c)\quad 即\quad L(\Gamma_\varepsilon)<L(c)$$

这是不合理的。原因是，根据定理的假设，c 是连结 P_1 与 P_2 的短

程线之故。故 c_ε 是连结 P 与 P_ε 的短程线。然因 P_ε 在邻域 O 内，根据定理 5.13，c_ε 是测地线。同理设曲线 c 上的弧 $\overset{\frown}{P_{-\varepsilon}P}$ 为 $c_{-\varepsilon}$，则 $c_{-\varepsilon}$ 也是测地线。又因在点 P，$c_{-\varepsilon}$ 与 c_ε 有相同的切线，所以 c 上的子弧 $P_{-\varepsilon}PP_\varepsilon$ 是测地线。以上事实说明，对于曲线 c 上任意点 $P(\neq P_1, P_2)$，包含 P 的 c 的某个子弧是测地线。故 c 自己是测地线。（证毕）

《**注意**》一般地说，定理 5.13 与 5.14 在 n 维黎曼空间里也成立。

距离 对于二维黎曼空间 (M, g) 的任意两点 P，Q，令

$$d(P, Q) = \text{g.l.b.}\, L(c)$$

但设在连结 P, Q 的正则曲线 c 的全体中有 g.l.b. 者.此 $d(P, Q)$ 有下列性质：对于 M 上的任意点 P，Q，R，

$$\text{(i)}\quad d(P, Q) = d(Q, P)$$

$$\text{(ii)}\quad d(P, R) \leqslant d(P, Q) + d(Q, R) \qquad (25.23)$$

$$\text{(iii)}\quad d(P, Q) \geqslant 0;\ d(P, Q) = 0 \Longleftrightarrow P = Q$$

〈**证明**〉 (i)与(ii)可用与例 8.1 同样证法证明.

(iii)的证明．如 $P = Q$，显然 $d(P, Q) = 0$。如当 $d(P, Q) = 0$ 但设 $P \neq Q$。首先，能够在包含 P 的某坐标邻域 O 内取测地极坐标，而且设 Q 在 O 里，如 $P \neq Q$，设 $Q(r_0, \theta_0)$，则 $r_0 > 0$。然而，由定理 5.13 知 $d(P, Q) = r_0 > 0$。这和 $d(P, Q) = 0$ 矛盾.故在这种情况下，$P = Q$。其次，设 Q 未包含于 O，设 Q 在以 P 为中心的黎曼圆 $r = r_0$ 之外侧，则连结 P 与 Q 的任意正则曲线与黎曼圆 $r = r_0$ 相交，故 $L(c) > r_0$，于是得 $d(P, Q) = \text{g.l.b.}\, L(c) \geqslant r_0 > 0$，这和假设 $d(P, Q) = 0$ 矛盾。因此必须 $P = Q$。（证毕）

上述(25.23) 说明 $d(P, Q)$ 是 M 上的距离函数。以 d 为距离函数的距离空间 (M, d) 与流形 M 有相同的拓扑（证明略。但事实不难理解）．因此，二维黎曼空间 (M, g) 与距离空间 (M, g) 在拓扑上可等同起来。当此距离空间 (M, d) 是完备时，就说黎曼空间 (M, g) 是**完备**的。对 (M, g) 的任意两点 P, Q，存在实数 a 使得 $d(P, Q) \leqslant a$ 时，就说 (M, g) 是**有界**的。显然，下列事实成立。

如果二维黎曼空间有界而且完备，那末(M, g)是紧致的。

当(M, g)紧致时，

$$D=\max_{P, Q\in M} d(P, Q)$$

叫做黎曼空间(M, g)的**直径**。

到目前为止关于距离的叙述，对于n维黎曼空间也照样成立。

§26　高斯·朋尼定理

关于二维黎曼空间(M, g)的坐标邻域O内的坐标系(u,v)，设u曲线与v曲线正交。又设正则曲线c（设弧长s为其参数）在其各点$c(s)$与u曲线的夹角为$\theta(s)$，则c的曲率κ由下列公式而定。

公式
$$\kappa=\frac{d\theta}{ds}+\kappa_1\cos\theta+\kappa_2\sin\theta \tag{26.1}$$

式中κ_1与κ_2分别为u曲线与v曲线的曲率。

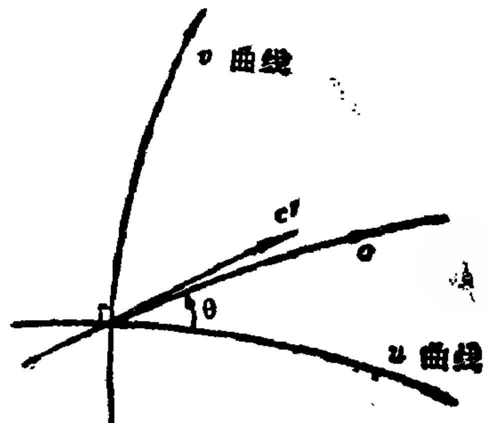


图 5.18

〈**证明**〉　在坐标邻域O内令

$$e_1=\frac{\partial}{\partial u}\Big/\left\|\frac{\partial}{\partial u}\right\|, e_2=\frac{\partial}{\partial v}\Big/\left\|\frac{\partial}{\partial v}\right\|$$

在各点e_1与e_2是互相正交的单位向量。将e_1与e_2限制在c上考虑，设c的局部表示为$u=u(s)$，$v=v(s)$，则

$$\frac{\delta e_1}{ds}=\frac{\delta e_1}{du}\frac{du}{ds}+\frac{\delta e_1}{dv}\frac{dv}{ds}$$

式中$\delta e_1/du$与$\delta e_1/dv$分别表示沿着u曲线与v曲线e_1的共变微分。其次设u曲线与v曲线的弧长分别为s_1与s_2，则沿u曲线与v曲线，下式成立。

$$\frac{\delta e_1}{du}=\frac{\delta e_1}{ds_1}\frac{ds_1}{du},\qquad \frac{\delta e_1}{dv}=\frac{\delta e_1}{ds_2}\frac{ds_2}{dv}$$

$$\therefore\quad \frac{\delta e_1}{ds}=\frac{\delta e_1}{ds_1}\frac{ds_1}{du}\frac{du}{ds}+\frac{de_1}{ds_2}\frac{ds_2}{dv}\frac{dv}{ds} \tag{26.2}$$

根据假设

$$c' = \cos\theta \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta \boldsymbol{e}_2 \tag{26.3}$$

显然

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{ds_1}{du}\boldsymbol{e}_1, \qquad \frac{\partial}{\partial v} = \frac{ds_2}{dv}\boldsymbol{e}_2$$

$$\therefore \quad c' = \frac{du}{ds}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{ds}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{du}{ds}\frac{ds_1}{du}\boldsymbol{e}_1 + \frac{dv}{ds}\frac{ds_2}{dv}\boldsymbol{e}_2$$

上式与(26.3)比较之可得

$$\cos\theta = \frac{ds_1}{du}\frac{du}{ds}, \qquad \sin\theta = \frac{ds_2}{dv}\frac{dv}{ds} \tag{26.4}$$

故由(26.2)可见，下式成立。

$$\frac{\delta \boldsymbol{e}_1}{ds} = \frac{\delta \boldsymbol{e}_1}{ds_1}\cos\theta + \frac{\delta \boldsymbol{e}_1}{ds_2}\sin\theta \tag{26.5}$$

同理下式成立。

$$\frac{\delta \boldsymbol{e}_2}{ds} = \frac{\delta \boldsymbol{e}_2}{ds_1}\cos\theta + \frac{\delta \boldsymbol{e}_2}{ds_2}\sin\theta \tag{26.6}$$

再由(26.3)，(26.4)，(26.5)可见，曲线 c 的曲率向量 $\boldsymbol{k}$ 变为

$$\boldsymbol{k} = \nabla c' c' = \frac{\delta}{ds}(\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta \boldsymbol{e}_2)$$

$$= \frac{\delta \boldsymbol{e}_1}{ds_1}\cos^2\theta + \left(\frac{\delta \boldsymbol{e}_1}{ds_2} + \frac{\delta \boldsymbol{e}_2}{ds_1}\right)\cos\theta\sin\theta + \frac{\delta \boldsymbol{e}_2}{ds_2}\sin^2\theta + \frac{d\theta}{ds}\boldsymbol{n}$$

式中

$$\boldsymbol{n} = -\sin\theta \boldsymbol{e}_1 + \cos\theta \boldsymbol{e}_2$$

是曲线 c 的单位法向量，根据决定 $\boldsymbol{k}$ 的上式以及(24.7)得曲线 c 的曲率 κ 为

$$\kappa = (\boldsymbol{n}, \ \boldsymbol{k})$$

又因 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 是单位向量场，故

$$\left(\boldsymbol{e}_1, \ \frac{\delta \boldsymbol{e}_1}{ds_1}\right) = \left(\boldsymbol{e}_1, \ \frac{\delta \boldsymbol{e}_1}{ds_2}\right) = \left(\boldsymbol{e}_2, \ \frac{\delta \boldsymbol{e}_2}{ds_1}\right) = \left(\boldsymbol{e}_2, \ \frac{\delta \boldsymbol{e}_2}{ds_2}\right) = 0$$

运用这些得

$$\kappa=(n,\ k)=\left(e_2,\ \frac{\delta e_1}{ds_1}\right)\cos^3\theta+\left(e_2,\ \frac{\delta e_1}{ds_2}\right)\cos^2\theta\sin\theta$$

$$-\left(e_1,\ \frac{\delta e_2}{ds_1}\right)\sin^2\theta\cos\theta-\left(e_1,\ \frac{\delta e_2}{ds_2}\right)\sin^3\theta+\frac{d\theta}{ds}$$

然因 u 曲线的曲率 κ_1 与 v 曲线的曲率 κ_2 分别为

$$\kappa_1=\left(e_2,\frac{\delta e_1}{ds_1}\right)=-\left(e_1,\frac{\delta e_2}{ds_1}\right),\quad \kappa_2=\left(e_1,\frac{\delta e_2}{ds_2}\right)=-\left(e_2,\frac{\delta e_1}{ds_2}\right)$$

故将这些式子代入上式可得下式。

$$\kappa=\frac{d\theta}{ds}+\kappa_1\cos\theta+\kappa_2\sin\theta \qquad \text{(证毕)}$$

公式(26.1)可以改写如下：

$$\kappa=\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2+\kappa_1\sqrt{E}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\kappa_2\sqrt{G}\,\frac{dv}{ds} \qquad (26.7)$$

式中运用了 $E=\left(\frac{ds_1}{du}\right)^2$，$F=0$，$G=\left(\frac{ds_2}{dv}\right)^2$ 以及(26.4)。

定理 5.15 **（格林）** 设在平面上有与开圆盘同胚的开域 D，其边缘 ∂D 为闭的 D^∞ 曲线 c。如果二函数 P，Q 在 D 里是 C^∞ 函数，在 $\overline{D}=D\cup\partial D$ 是连续的，那末

$$\int_c\left(P\frac{du}{dt}+Q\frac{dv}{dt}\right)dt=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}\right)dudv \qquad (26.8)$$

式中设 $(u,\ v)$ 为平面上的直角坐标，c 的参数表示为 $u=u(t)$，$v=v(t)$。

〈证明〉 略。请参考微积分的书。

引理 5.16 在二维黎曼空间 $(M,\ g)$ 的坐标邻域 O 里取开域 D，设 D 与平面上的开圆盘同胚并设边缘 ∂D 是闭的 D^∞ 曲线 c。在公式 (26.1) 即(26.7)成立的状态下，

$$\int_c\kappa ds=\int_c d\theta-\iint_D Kd\sigma,\quad d\sigma=\sqrt{\det(g_{ij})}\,dudv \qquad (26.9)$$

〈证明〉 在公式(26.1)，(26.7)的证明中所作的假设下来考虑，

并且使用相同的符号。因为在坐标邻域O里，坐标曲线正交，运用〔问题 12.2〕的结果，得下式。

$$\kappa_1 = -\frac{\partial E}{\partial v}\Big/ 2E\sqrt{G}, \qquad \kappa_2 = \frac{\partial G}{\partial u}\Big/ 2G\sqrt{E}$$

将这些式子代入(26.7)得

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{EG}}\,\frac{\partial E}{\partial v}\,\frac{du}{ds} + \frac{1}{2\sqrt{EG}}\,\frac{\partial G}{\partial u}\,\frac{dv}{ds}$$

故运用上述定理 5.15 得

$$\begin{aligned}\int_c \kappa ds &= \int_c d\theta + \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{2\sqrt{EG}}\,\frac{\partial G}{\partial u}\right)\right.\\ &\qquad \left.+ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{2\sqrt{EG}}\,\frac{\partial E}{\partial v}\right)\right] du dv\\ &= \int_c d\theta + \iint_D \frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{2\sqrt{EG}}\,\frac{\partial G}{\partial u}\right)\right.\\ &\qquad \left.+ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{2\sqrt{EG}}\,\frac{\partial E}{\partial v}\right)\right] d\sigma\\ &= \int_c d\theta + \iint_D \frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\,\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)\right.\\ &\qquad \left.+ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right] d\sigma\end{aligned}$$

再运用例 13.1 的(13.17) 即得

$$\int_c \kappa ds = \int_c d\theta - \iint_D K d\sigma \quad \text{（证毕）}$$

在引理 5.16 的假设下，下列等式成立。

$$\int_c d\theta + \sum_p \alpha_p = 2\pi \qquad (26.10)$$

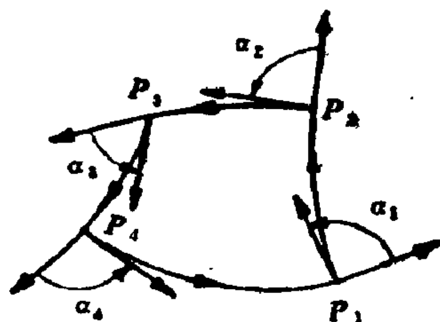


图 5.19

式中 α_1，α_2，…分别是 $c = \partial D$ 的顶点 P_1，P_2，…处的外角。显然此关系对欧氏平面的图形成立。然而这种关系可用拓扑学证明，在二维黎曼空

间里也成立。但略去其详细证明。运用上述公式(26.10)与(26.9)，立即可证下列引理。

引理 5.17 在引理 5.16 的假设下

$$\int_c \kappa ds + \iint_D K d\sigma = 2\pi - \sum_p \alpha_p \qquad (26.11)$$

定理 5.18 (高斯·崩尼) 设二维黎曼空间(M, g)的开域D与平面上的圆盘同胚，其边缘∂D是闭的D^∞曲线c。再设D有向。这时，

$$\int_c \kappa ds + \iint_D K d\sigma = 2\pi - \sum_p \alpha_p \qquad (26.12)$$

式中α_1，α_2，…分别是c的顶点P_1，P_2，…处的外角。

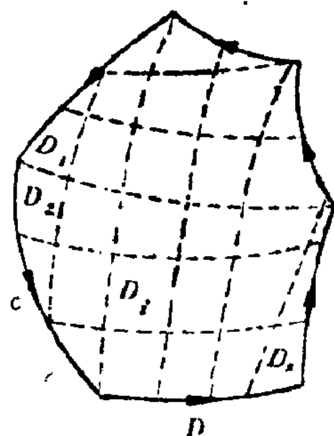


图 5.20

〈证明〉 将D剖分成有限个域D_1，D_2，…，D_s，使得各D_α包含于坐标邻域O_α，这时，可使D_α满足引理 5.16 的条件$(\alpha=1, \cdots, s)$。此外，在各O_α里取表示D的方向的坐标系$(\alpha=1,\cdots,s)$。这样一来，(26.11)对于各D_α成立。将此s个关系式边边相加，可得(26.12)。(证毕)

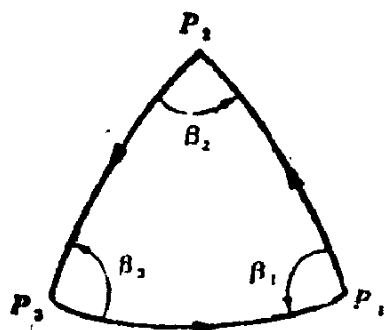


图 5.21

测地三角形 在二维黎曼空间里，当三条测地线的弧$\widehat{P_1P_2}$，$\widehat{P_2P_3}$，$\widehat{P_3P_1}$作成闭的D^∞曲线c，当c所包围的域D与平面上的开圆盘同胚时，此图形就叫做**测地三角形**$P_1P_2P_3$。

定理 5.19 在二维黎曼空间里，测地三角形$P_1P_2P_3$的内角β_1，β_2，β_3之和

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi + \iint_D K d\sigma \qquad (26.13)$$

式中D表示测地三角形$P_1P_2P_3$的内部。

〈**证明**〉 因为测地三角形 $P_1P_2P_3$ 的各边是测地线，所以其曲率 $\kappa=0$。又因各顶点处的外角为 $\alpha_1=\pi-\beta_1$，$\alpha_2=\pi-\beta_2$，$\alpha_3=\pi-\beta_3$，故由定理 5.18 可得（26.13）。

《**注意**》设(M, g) 的曲率为K，测地三角形的内角之和有下列性质。

（i） 如果到处 $K>0$，那末 $\beta_1+\beta_2+\beta_3>\pi$

（ii） 如果到处 $K<0$，那末 $\beta_1+\beta_2+\beta_3<\pi$

（iii） 如果到处 $K=0$，那末 $\beta_1+\beta_2+\beta_3=\pi$

【**问题 26.1**】 在半径为 a 的球面 $S^2(a)$上，测地三角形$P_1P_1P_3$ 的内角 β_1，β_2，β_3 之和 $\beta_1+\beta_2+\beta_3=\pi+A/a^2$，式中 A 是测地三角形 $P_1P_2P_3$ 内部的面积（在 $S^2(a)$上，测地线为大圆弧），试证明之（运用 $K=1/a^2$）。

§27 二维常曲率空间 非欧平面

设二维黎曼空间(M, g) 为常曲率空间，由(23.20)与(23.21)可见，(M, g) 的曲率K为常数。还设(M, g) 为二维常曲率空间，则由 (25.10)可见关于以M的各点为中心的测地极坐标(r, θ)，线素为

$$ds^2=dr^2+G(r, \theta)d\theta^2$$

根据(25.6)得微分方程

$$\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}+K\sqrt{G}=0 \quad (K=\text{为常数}) \qquad (27.1)$$

而$\sqrt{G}$满足初始条件

$$\lim_{r\to0}\sqrt{G}=0, \quad \lim_{r\to0}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\right)=1 \qquad (27.2)$$

（参照（25.18））。再把K分为下述的三种情况。

（I） **当$K>0$ 时**，解(27.1)，得通解

$$\sqrt{G}=A(\theta)\cos\sqrt{K}r+B(\theta)\sin\sqrt{K}r$$

将初始条件(27.2)代入此式得

$$\sqrt{G}=\frac{1}{\sqrt{K}}\sin\sqrt{K}r \qquad (27.3)$$

（Ⅱ） **当$K<0$时，** 同理得

$$\sqrt{G}=\frac{1}{\sqrt{-K}}\sinh\sqrt{-K}r \qquad (27.4)$$

（Ⅲ） **当$K=0$时，** 同理得

$$\sqrt{G}=r \qquad (27.5)$$

将上述事实整理一下得下列定理。

定理 5.20 设二维常曲率空间(M,g)的曲率为K（K为常数），关于以M的各点为中心的测地极坐标(r,θ)，其线素ds^2为

（Ⅰ） 当$K>0$时，$ds^2=dr^2+\frac{1}{K}\sin^2\sqrt{K}rd\theta^2$

（Ⅱ） 当$K<0$时，$ds^2=dr^2+\frac{1}{|K|}\sinh^2\sqrt{|K|}rd\theta^2$

（Ⅲ） 当$K=0$时，$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2$

【问题 27.1】 设两个常曲率二维黎曼空间(M,g)，$(\overline{M},\overline{g})$有相同的曲率$K$。若适当地取$M$的充分小邻域$O$与$\overline{M}$的充分小邻域$\overline{O}$，则存在映射$\varphi:O\to\overline{O}$，$\varphi$是一对一的，而且是等距映射。试证明之。

回转面 在回转面里求常曲率空间者。将xz平面上的曲线$z=f(x)$绕z轴回转之而得的回转面的方程为

$$x=u\cos\theta,\quad y=u\sin\theta,\quad z=f(u)$$

式中(u,θ)为参数。此回转面的线素为

$$ds^2=(1+f'(u)^2)du^2+u^2d\theta^2$$

再作参数变换(u,θ)：

$$r=\int\sqrt{1+f'(u)^2}\,du,\quad \theta=\theta \qquad (27.6)$$

将线素用(r,θ)表示之，得

$$ds^2=dr^2+Gd\theta^2,\quad G=G(u)=u^2 \qquad (27.7)$$

如果此回转面S为常曲率空间，以推导（27.3）与（27.4）的相

同方法可得

(i) 当 $K=\frac{1}{a^2}$ 时 | (ii) 当 $K=-\frac{1}{a^2}$ 时

则

$$\sqrt{G}=b\cos\frac{r}{a}+c\sin\frac{r}{a} \quad \Big| \quad \sqrt{G}=be^{r/a}+ce^{-r/a} \tag{27.8}$$

再由(27.6)与(27.7)可见

$$u=\sqrt{G}$$

$$z=f(u)=\pm\int\sqrt{1-\left(\frac{du}{dr}\right)^2}\,dr$$

故将(27.8)代入上式可见，此回转面 S

(i) 当 $K=\frac{1}{a^2}$ 时。将 xz 平面上的曲线

$$\left.\begin{aligned} x&=b\cos\frac{r}{a}+c\sin\frac{r}{a}\\ z&=\pm\int\sqrt{1-\frac{1}{a^2}\left(-b\sin\frac{r}{a}+c\cos\frac{r}{a}\right)^2}\,dr \end{aligned}\right\} \tag{27.9}$$

绕 z 轴回转而得；

(ii) 当 $K=-\frac{1}{a^2}$ 时。将 xz 平面上的曲线

$$\left.\begin{aligned} x&=be^{r/a}+ce^{-r/a}\\ z&=\pm\int\sqrt{1-\frac{1}{a^2}(be^{r/a}-ce^{-r/a})^2}\,dr \end{aligned}\right\} \tag{27.10}$$

绕 z 轴回转而得。

如果令

$$b=0, \qquad c=a$$

(i) 当$K=\frac{1}{a^2}$时	(ii) 当$K=-\frac{1}{a^2}$时
(27.9)变为	(27.10)变为
$x=a\sin\frac{r}{a}$	$x=ae^{-r/a}$
$z=\pm a\cos\frac{r}{a}+d$	$z=\pm\int\sqrt{1-e^{-2r/a}}\,dr+d$

此曲线为

半径a的圆	曳物线

此回转面为

半径a的球面	**伪半径a的伪球面**

伪球面的略图如图 5.22 所示。此伪球面在 xy 平面上有奇点。

《注意》 在 (27.9) 与 (27.10) 里，给常数 b 与 c 以各种值，可得各式各样的常曲率空间的回转面.然而，人们知道当$K=-\frac{1}{a^2}<0$ 时，不存在完备的回转面。当$K=\frac{1}{a^2}>0$时，完备的回转面只有球面。

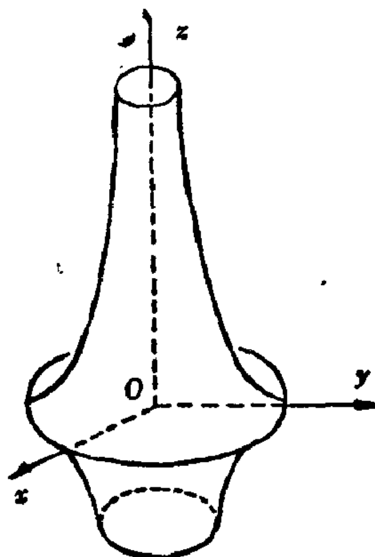


图 5.22

还有，伪球的线素为

$$ds^2=dr^2+a^2e^{-2r/a}d\theta^2$$

故

$$ds^2=(ae^{-r/a})^2\left\{\left(\frac{1}{a}e^{r/a}\right)^2dr^2+d\theta^2\right\}$$

再将局部坐标按

$$\xi=\theta,\quad \eta=e^{r/a}$$

从$(r,\ \theta)$变为$(\xi,\ \eta)$，则伪球的线素由

$$ds^2=\frac{a^2(d\xi^2+d\eta^2)}{\eta^2} \tag{27.11}$$

而定。

双曲平面 在 xy 平面的上半平面$M=\{(x, y)|y>0\}$里，通过定义线素为

$$ds^2=\frac{a^2(dx^2+dy^2)}{y^2}, \quad (a\text{ 是常数}) \tag{27.12}$$

而定义二维黎曼空间(M, g)，比较（27.11)与（27.12）可见下列事实：此(M, g)为以$K=-1/a^2$ 为负常曲率的常曲率空间。此黎曼空间(M, g)叫做**双曲平面**，令 $u^1=x$，$u^2=y$，则

$$\left\{\begin{matrix}1\\11\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}1\\22\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}2\\12\end{matrix}\right\}=0$$

$$-\left\{\begin{matrix}1\\12\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}2\\11\end{matrix}\right\}=-\left\{\begin{matrix}2\\22\end{matrix}\right\}=\frac{1}{y}$$

故在双曲平面里，测地线的微分方程为

$$x''-\frac{2x'y'}{y}=0, \quad y''+\frac{x'^2-y'^2}{y}=0 \tag{27.13}$$

但取了弧长 s 为参数。其次，求(27.13) 的解。

从(27.13) 的第一式与第二式分别可得

$$\frac{x'}{y^2}=c \quad (\text{常数}), \quad \left(\frac{y'}{y}\right)'+\frac{x'^2}{y^2}=0 \tag{27.14}$$

将上列第一式代入第二式可得

$$\left(\frac{y'}{y}\right)'+cx'=0$$

$$\therefore \quad \frac{y'}{y}+cx=b(=\text{常数}) \tag{27.15}$$

首先，从(27.14)的第一式可见，如果 $c=0$，那末得到

$$x=\text{常数}$$

可见这是测地线的方程。

再设 $c\neq 0$，则从(27.14)的第一式与(27.15)得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b-cx}{cy} \quad \left(\because \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}\right)$$

$$x^2+y^2-\frac{2b}{c}x=d\ (=常数)$$

即在 xy 平面上，圆心在 x 轴上的圆

$$(x-\alpha)^2+y^2=\beta^2,\ y>0$$

为测地线。

整理之可得以下事实：双曲平面(M, g)的测地线为

$$x=常数\quad 或\quad (x-\alpha)^2+y^2=\beta^2$$

即在双曲平面上，测地线为（普通欧氏平面上的）与 x 轴垂直的直线，或与 x 轴垂直的圆(如图 5.23 所示）。

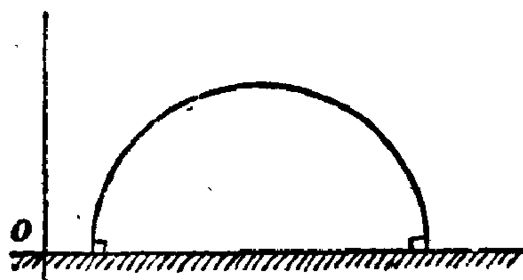


图 5.23

如果人们规定双曲平面(M,g)上的测地线 $c:(-\infty, \infty)\to M$ 叫做**直线**，则若二直线相交，就只交于一点。再规定不相交二直线就叫做**平行**，则得通过不在一直线 l 上的一点，与 l 平行的直线有无限多条。故在双曲平面上欧几里得平行线公理不成立。在这样含义下，双曲平面叫做**双曲非欧平面**。

椭圆平面　在半径为 a 的球面 $S^2(a)$上,测地线为大圆.在 $S^2(a)$上把互为对径点的两点看成一个，便得射影平面 $P^2(a)$，可定义 $\pi:S^2(a)\to P^2(a)$ 如例 17.2.如在例 17.2所述，将 $S^2(a)$的半球面的边界 c 上的对径点看成一个,可得 $P^2(a)$。在 $P^2(a)$里，取如图 5.24 的邻域O，则O 也可看做 $S^2(a)$ 上的邻域。故在 $P^2(a)$上可定义黎曼度量 g 与球面 $S^2(a)$具有相同线素。于是考虑二维黎曼空间 $(P^2(a), g)$,叫做**椭圆平面**。显然，此椭圆平面是正曲率 $K=1/a^2$ 的常曲率空间。$(P^2(a), g)$的测地线是球面 $S^2(a)$上的大圆在 $\pi:S^2(a)\to P^2(a)$下的象,它是闭曲线，而且其长为 $\pi a(=2\pi a/2)$。

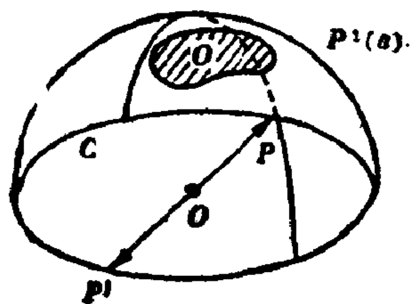


图 5.24

如规定 $(P^2(a), g)$ 上的测地线叫做**直线**，则二直线必交于一点。故通过不在直线 l 上的一点 P，并不存在与 l 平行（与 l 不相交）的直线。在这种含义下，在 $(P^2(a), g)$ 里，欧几里得的平行线公理不成立。于是，黎曼空间 $(P^2(a), g)$ 叫做**椭圆非欧平面**。

§28 映射 等距映射

设 M 为 n 维流形，N 为 r 维流形。又设给定连续映射 $\varphi: M\to N$，M 的图册为 $\mathscr{B}$，N 的图册为 $\overline{\mathscr{B}}$。任意取 $\mathscr{B}$ 的元 $\{U,\theta,O\}$ 与 $\overline{\mathscr{B}}$ 的元 $\{\overline{U}, \overline{\theta}, \overline{O}\}$。再设 O 里的局部坐标为 $(x^1, \cdots, x^n)$，$\overline{O}$ 里的局部坐标为 $(y^1, \cdots, y^r)$。还设 $\varphi(O)\cap\overline{O}\neq\varnothing$，令 $\tilde{\varphi}=\overline{\theta}\circ\varphi\circ\theta^{-1}$，则

$$\varphi: \varphi^{-1}(\overline{O})\cap O\to\varphi(O)\cap\overline{O},\quad \tilde{\varphi}: \tilde{\varphi}^{-1}(\overline{U})\cap U\to\tilde{\varphi}(U)\cap\overline{U}$$

用 O 与 $\overline{O}$ 的局部坐标来表示此映射 $\tilde{\varphi}$ 时得

$$y^\alpha = y^\alpha(x^1, \cdots, x^n), \quad (\alpha=1, \cdots, r) \qquad (28.1)$$

假设右边的函数 $y^\alpha(x^1, \cdots, x^n)$ 全是 C^∞ 函数。这时，$\varphi: M\to N$ 叫做 **C^∞ 映射**。(28.1)叫做 φ 关于 O 与 $\overline{O}$ 的**局部表示**。

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(\overline{O})\cap O & \xrightarrow{\theta} & \tilde{\varphi}^{-1}(\overline{U})\cap U\subset R^n \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\tilde{\varphi} \\ \varphi(O)\cap\overline{O} & \xrightarrow[\overline{\theta}]{} & \tilde{\varphi}(U)\cap\overline{U}\subset R^r \end{array}$$

当 $\varphi: M\to N$ 为同胚映射，而且 φ 与 φ^{-1} 都是 C^∞ 映射时，φ 叫做**微分同胚映射** (differentiable heomeomorphism)，这时说流形 M 与流形 N **微分同胚**。微分同胚流形 M 与 N 的维数相等。

微分映射 设 $\varphi: M\to N$ 为 C^∞ 映射。任意取 M 上一点 P 以及 P 处的切向量 A。在点 $\varphi(P)$ 处 N 的切向量 $\overline{A}$ 由

$$\overline{A}\,\overline{f} = A\,(\overline{f}\circ\varphi) \qquad (28.2)$$

定义，但 $\overline{f}$ 为 N 上的任意 C^∞ 函数。

【问题 28.1】 如果$\bar{f}$为N上的C^∞函数，$\varphi: M\to N$为C^∞映射，那末证明$\bar{f}\circ\varphi$为M上的C^∞函数。

【问题 28.2】 试证由上述(28.2)能够定义点$\varphi(P)$处流形N的切向量$\overline{A}$。

如果根据(28.2)定义对应$A\mapsto\overline{A}$，则由此定义线性映射

$$\varphi_P^*: T_P(M)\to T_{\varphi(P)}(N) \qquad (28.3)$$

($\varphi^*(A)=\overline{A}$)。此$\varphi_P^*$叫做$\varphi$在点$P$处的**微分映射**.微分映射$\varphi_P^*$是线性映射。

【问题 28.3】 试证上述微分映射(28.3)是线性映射。

关于$T_P(M)$的基底$\{(\partial/\partial x^1)_P, \cdots, (\partial/\partial x^n)_P\}$与$T_{\varphi(P)}(N)$的基底$\{(\partial/\partial y^1)_{\varphi(P)}, \cdots, (\partial/\partial y^r)_{\varphi(P)}\}$，线性映射$\varphi_P^*$以矩阵表示之，则矩阵表示为

$$\left(\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\right)_P\right), \quad (i=1, \cdots, n;\ \alpha=1, \cdots, r)$$

式中$y^\alpha(x^1, \cdots, x^n)$是(28.1)右边的函数．故

$$\text{如果}\quad A=A^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_P, \text{那末}\ \varphi_P^*(A)=\left(\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\right)_P A^i\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\varphi(P)} \qquad (28.4)$$

这是求$\varphi_P^*(A)$的分量的公式。

【问题 28.4】 试证上述(28.4)。

当$\dim M\leqslant\dim N$，对于C^∞映射$\varphi: M\to N$，如果对于M的各点P，$\varphi_P^*: T_P(M)\to T_{\varphi(P)}(N)$是在$T_{\varphi(P)}(N)$中的同构映射，那末$\varphi$叫做**正则映射**，对于正则映射$\varphi: M\to N$的局部表示(28.1)，矩阵

$$\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\right), \quad (i=1, \cdots, n;\ \alpha=1, \cdots, r) \qquad (28.5)$$

的秩在$\varphi^{-1}(\overline{O})\cap O$的各点等于$n=\dim M$。

如果$\dim M=\dim N=n$，C^∞映射$\varphi: M\to N$是正则的，那末φ的局部表示φ_P^*是从$T_P(M)$到$T_{\varphi(P)}(N)$上的同构映射。这时，(28.5)是正则矩阵，这样的$\varphi: M\to N$叫做**局部微分同胚映射**。

如果$\varphi: M\to N$是微分同胚映射，那末φ是局部微分同胚。反之，如果$\varphi: M\to N$是同胚而且是局部微分同胚，那末φ是微分同胚映射。

映射与共变张量 设$\varphi: M\to N$为C^∞映射.取N上的三阶共变张量场$\overline{W}$。在M上取任意向量场X，Y，Z，令

$$W(X,\ Y,\ Z)_P=\overline{W}_{\varphi(P)}(\varphi^*_P(X),\ \varphi^*_P(Y),\varphi^*_P(Z)) \tag{28.6}$$

但定义$\overline{W}_{\varphi(P)}$如下：对于$N$上的任意向量场$\overline{X}$，$\overline{Y}$，$\overline{Z}$，

$$\overline{W}_{\varphi(P)}(\overline{X}_{\varphi(P)},\overline{Y}_{\varphi(P)},\overline{Z}_{\varphi(P)})=\overline{W}(\overline{X},\ \overline{Y},\ \overline{Z})_{\varphi(P)}.$$

设对应 $P\mapsto W(X,\ Y,\ Z)_P$

决定的M上的C^∞函数为$W(X,\ Y,\ Z)$，则由对应

$$(X,\ Y,\ Z)\mapsto W(X,\ Y,\ Z) \tag{28.7}$$

决定M上的三阶共变张量场W。此W叫做在φ下从$\overline{W}$导入的张量场，以

$$W=\varphi_*\overline{W}$$

表示之。

【问题 28.5】 试证由上述(28.6)与(28.7)定义的W是M上的三阶共变张量场。

同理，对于N上的任意p阶共变张量场$\overline{W}$，可以定义M上的p阶共变张量场$W=\varphi_*\overline{W}$。

设N上的三阶共变张量场$\overline{W}$在坐标邻域$\overline{O}$里的分量为$\overline{W}_{\gamma\beta\alpha}$，则$W=\varphi_*\overline{W}$在$\varphi^{-1}(\overline{O})\cap O$里的分量$W_{jih}$由

$$W_{jih}=\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^j}\ \frac{\partial y^\beta}{\partial x^i}\ \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^h}\ (\overline{W}_{\gamma\beta\alpha}\circ\varphi) \tag{28.8}$$

而定。但设$y^\alpha=y^\alpha(x^1,\ \cdots,\ x^n)$是$\varphi$的邻域表示(28.1)。

【问题 28.6】 试证上述(28.8)。

映射与微分形式 因为微分形式是共变张量场，所以对于C^∞映射$\varphi: M\to N$，任意给定$\overline{\omega}\in\Lambda^p(N)$，对应以$\varphi_*\overline{\omega}\in\Lambda^p(M)$，由此而

决定映射

$$\varphi_*: \Lambda^p(N) \to \Lambda^p(M)$$

《注意》运用上述(28.8)，可见下列事实．当 $\overline{\omega}$ 的局部表示为

$$\overline{\omega} = \sum_{\gamma, \beta, \alpha} \overline{\omega}_{\gamma\beta\alpha}(y) dy^\gamma \wedge dy^\beta \wedge dy^\alpha$$

时，将 φ 的局部表示及其微分

$$y^\alpha = y^\alpha(x^1, \cdots, x^n), \quad dy^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} dx^i$$

代入上式的右边可得 $\omega = \varphi_* \overline{\omega}$ 的局部表示．

显然，下列公式成立．

$$\varphi_*(\overline{\omega} + \overline{\pi}) = \varphi_* \overline{\omega} + \varphi_* \overline{\pi} \qquad (\overline{\omega}, \overline{\pi} \in \Lambda^p(N))$$

$$\varphi_*(\overline{f}\overline{\omega}) = (\varphi_* \overline{f}) \varphi_*(\overline{\omega}) \qquad (\overline{f} \in \Lambda^0(N), \overline{\omega} \in \Lambda^p(N)) \quad (28.9)$$

$$\varphi_*(\overline{\omega} \wedge \overline{\pi}) = (\varphi_* \overline{\omega}) \wedge \varphi_*(\overline{\pi}) \qquad (\overline{\omega} \in \Lambda^p(N), \overline{\pi} \in \Lambda^q(N))$$

但于式中令 $\varphi_* \overline{f} = \overline{f} \circ \varphi$．

对于 N 上的 C^∞ 函数 $\overline{f}$，$d\overline{f}$ 为一次微分形式，其分量为 $(\partial \overline{f}/\partial y^1, \cdots, \partial \overline{f}/\partial y^\gamma)$．故由(28.8)可见，$\theta = \varphi_*(d\overline{f})$ 的分量为

$$\theta_i = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \overline{f}}{\partial y^\alpha} \circ \varphi = \frac{\partial \overline{f} \circ \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi_* \overline{f}}{\partial x^i}$$

故 $\theta = d(\varphi_* \overline{f})$．因此，下列公式成立．

$$\varphi_*(d\overline{f}) = d(\varphi_* \overline{f}), \quad (\overline{f} \in \Lambda^0(N)) \qquad (28.10)$$

特别是，对于 N 的局部坐标函数 y^α

$$\varphi_* dy^\alpha = d(\varphi_* y^\alpha) = \frac{\partial y^\alpha \circ \varphi}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} dx^i \qquad (28.11)$$

式中 $\partial y^\alpha / \partial x^i$ 是(28.1)右边的函数 $y^\alpha(x^1, \cdots, x^n)$ 的偏导函数．

设 N 上的一次微分形式 $\overline{\omega}$ 的局部表示为 $\overline{\omega} = \overline{\omega}_\alpha dy^\alpha$，又设 $\omega = \varphi_* \overline{\omega}$ 的局部表示为 $\omega = \omega_i dx^i$，则由(28.8)可见，下式成立．

$$\omega_i = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} (\overline{\omega}_\alpha \circ \varphi)$$

故运用(28.10)与(28.11)，可作下列计算．

$$d(\varphi_*\bar{\omega}) = d\omega = d\omega_i \wedge dx^i = d\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}(\bar{\omega}_\alpha\circ\varphi)\right)\wedge dx^i$$

$$= \sum_{j<i}\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^j\partial x^i}(\bar{\omega}_\alpha\circ\varphi)dx^j\wedge dx^i + \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}d(\bar{\omega}_\alpha\circ\varphi)\wedge dx^i$$

$$= 0 + \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}(\varphi_* d\bar{\omega}_\alpha)\wedge dx^i = (\varphi_* d\bar{\omega}_\alpha)\wedge(\varphi_* dy^\alpha)$$

$$= \varphi_*(d\bar{\omega}_\alpha\wedge dy^\alpha) = \varphi_*(d\bar{\omega})$$

$$\therefore \quad d(\varphi_*\bar{\omega}) = \varphi_*(d\omega) \tag{28.12}$$

同理，一般地说下列公式成立：对于任意的 $\bar{\omega}\in\Lambda^p(N)$

$$d(\varphi_*\bar{\omega}) = \varphi_*(d\bar{\omega}) \tag{28.13}$$

等距映射 有两个黎曼空间(M, g)与$(N, \bar{g})$，设给定了微分同胚映射 $\varphi: M\to N$。当取M上的曲线$c: I\to M$时，则N上的曲线 $\bar{c} = \varphi\circ c: I\to N$ 叫做 c 在φ下的**象**。对于M上的任意曲线 c，设它在φ下的象为$\bar{c}$ 时，假设

$$L(c) = L(\bar{c})$$

总是成立。这时，$\varphi: M\to N$ 叫做从黎曼空间(M, g) 到 $(N, \bar{g})$上的**等距映射**，就说(M, g)与$(N, \bar{g})$是**等距的**。

一般说来，对于同胚 $\varphi: M\to N$，令 $\tilde{g} = \varphi_*\bar{g}$ 则 $\tilde{g}$ 是M上的二阶共变张量场，在M上定义一种黎曼度量。此 $\tilde{g}$叫做从 $\bar{g}$在φ下导入的黎曼度量。

定理 5.21 对于两个黎曼空间 (M, g) 与 $(N, \bar{g})$，微分同胚映射 $\varphi: M\to N$ 为等距映象的充要条件是

$$g = \varphi_*\bar{g}$$

〈**证明**〉 在§16 定理 3.17 的证明中所作讨论，照样执行即可。

如果两个黎曼空间(M, g)与$(N, \bar{g})$是等距的，则将M的任意点P与其对应的N的点 $\varphi(P)$ （设 $\varphi: M\to N$ 是等距映射）看做是一个点，则(M, g)与$(N, \bar{g})$可看做一个黎曼空间，故得下列定理.

定理 5.22 如果两个二维黎曼空间(M, g)与$(N, \bar{g})$ 之间有等距映射 $\varphi: M\to N$，则

$$K = \overline{K} \circ \varphi$$

式中K与$\overline{K}$分别为(M, g)与$(N, \overline{g})$的曲率。

等距变换 对于黎曼空间(M, g)，当微分同胚映射 $\varphi: M \to M$是等距映射($g = \varphi_* g$ 成立)时，φ 叫做(M, g)的**等距变换**或**运动**。(M, g)的等距变换全体，关于映射的复合作成群。这个群叫做(M, g) 的**等距变换群**或**运动群**。

黎曼空间(M, g)的运动群以 $I(M)$ 表示，在 $I(M)$ 里用某种方法导入拓扑，有人证明了 $I(M)$是连续群而且是李群。此外人们知道 n 维黎曼空间(M, g)的运动群 $I(M)$的维满足下列不等式。

$$\dim I(M) \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$$

人们还知道，如果等号成立，那末(M, g)是常曲率空间。

又用与习题三之13(2)(p.111)完全相同的方法，可以证明下列定理。

定理 5.23 如果二维黎曼空间(M, g)的运动群是可迁的，那末(M, g)是常曲率空间。

《注意》 对于 n 维黎曼空间($n \geqslant 3$)，定理 5.23 不成立。

例 28.1 欧氏平面 E^2 是曲率为 0 的常曲率空间。如在 E^2内取直角坐标系(x, y)，则 E^2 的一个运动 $T: E^2 \to E^2$ 由

$$\overline{x} = x\cos\theta - y\sin\theta + a$$
$$\overline{y} = x\sin\theta + y\cos\theta + b$$

而定，(θ, a, b)是常数。即运动 T 由三个独立的变数 (θ, a, b)而定。故 E^2 的运动群 $I(E^2)$的维由下式给出

$$\dim I(E^2) = 3 = \frac{2(2+1)}{2}$$

例 28.2 欧氏空间 E^3 里的半径为 a 的球面

$$S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

是曲率 $1/a^2$ 的常曲率空间。S^2 上的一个运动 $T: S^2 \to S^2$ 是绕E^3 的原点的正交变换$\widetilde{T}: E^3 \to E^3$ 在 S^2 上的限制。故 S^2 的运动群 $I(S^2)$

与E^3 的正交变换群 $O(3)$同构。然因 $O(3)$是三阶正交矩阵全体所作的群，故 $I(S^2)$的维由下式给出。

$$\dim I(S^2)=\dim O(3)=3=\frac{2(2+1)}{2}$$

例 28.3 双曲平面 H^2 是在 xy 平面上的上半平面 $y>0$ 里定义的，线素为

$$ds^2=\frac{a^2(dx^2+dy^2)}{y^2}$$

的黎曼空间，是曲率 $-1/a^2$ 的常曲率空间。今令

$$z=x+\sqrt{-1}\,y,\quad \bar{z}=x-\sqrt{-1}\,y$$

设 $\mathrm{Im}(z)$表示 z 的虚部，则上述线素变为

$$ds^2=\frac{a^2dzd\bar{z}}{\{\mathrm{Im}(z)\}^2}$$

H^2 的 C^∞ 变换T的定义为

$$z'=\frac{az+b}{cz+d},\quad (a,\ b,\ c,\ d\ \text{为实数},\ ad-cb\neq 0)$$

以 $z'=T(z)$记之，可以验证这个T保持ds^2 不变。故此T为 H^2上的运动。此运动 T 由四个实数之比 $a:b:c:d$ 而定。故H^2 的运动群 $I(H^2)$的维由下式给出。

$$\dim I(H^2)=3=\frac{2(2+1)}{2}$$

三维欧氏空间 E^3 内的曲面 设给定了从二维流形M到 E^3 里的正则映射 φ。设 E^3 的黎曼度量为 g(线素可用 $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ 表示的 g)。这时 φ_*g 是M上的黎曼度量，得到一个黎曼空间 (M,φ_*g)。这时，组 $\{(M,\ \varphi_*g),\ \varphi\}$ 叫做 E^3 的**曲面**。在第二章、第三章讨论的简单曲面M是以 $i:M\to E^3$ 为包含映射，用$\{(M,i_*g),\ i\}$表示的曲面。如果象这样重新定义曲面，则在例 6.2 与例 6.3 说明的不是简单曲面的例，却是这里所说含义下的曲面。在第二章，第三章所论事项几乎所有的对于这里定义的曲面也成立。

§29 变　　分

测地线　设给定 n 维黎曼空间 (M, g) 里的 C^∞ 曲线 $c:[a, b]\to M$。对于此曲线，存在 C^∞ 映射 $\varphi:[a, b]\times I\to M$，$(I=(-\alpha,\alpha)$ 为某

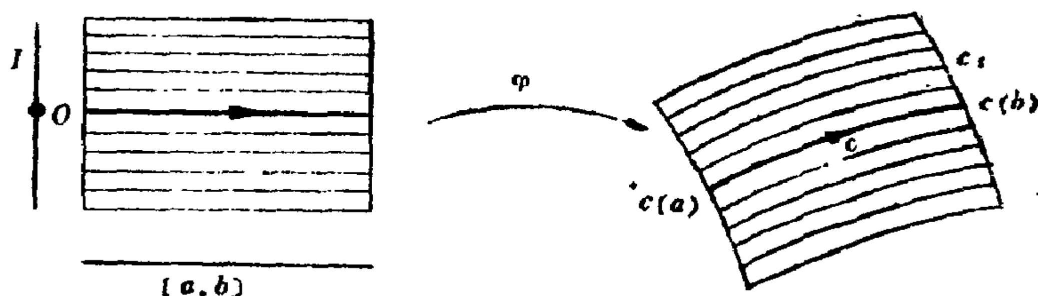


图 5.25

区间）满足

$$\varphi(t, 0)=c(t),\ (a\leqslant t\leqslant b)$$

时，φ 叫做曲线 c 的**变分**。这时，以

$$c_\varepsilon(t)=\varphi(t, \varepsilon),\ (-\alpha<\varepsilon<\alpha)$$

定义 C^∞ 曲线 c_ε，c_ε 叫做**变分曲线**。如果设曲线 c_ε 之长为 $L(\varepsilon)$，那末使用局部坐标

$$L(\varepsilon)=\int_a^b\sqrt{g_{ji}(x(t,\varepsilon))\frac{\partial x^j(t,\varepsilon)}{\partial t}\frac{\partial x^i(t,\varepsilon)}{\partial t}}\,dt \tag{29.1}$$

式中设 φ 的局部表示为 $x^h=x^h(t, \varepsilon)((t, \varepsilon)\in[a, b]\times I)$。此 $L(\varepsilon)$ 是 ε 的 C^∞ 函数。于是 $L(\varepsilon)$ 对 ε 微分之得

$$L'(\varepsilon)=\frac{dL(\varepsilon)}{d\varepsilon}=\int_a^b\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\sqrt{g_{ji}\dot{x}^j\dot{x}^i}\,dt,\quad \dot{x}^j=\frac{\partial x^j(t,\varepsilon)}{\partial t}$$

继续运算下去

$$L'(\varepsilon)=\frac{1}{2}\int_a^b\frac{1}{\sqrt{g_{ji}\dot{x}^j\dot{x}^i}}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^h}\dot{x}^j\dot{x}^i\frac{\partial x^h}{\partial\varepsilon}+2g_{ji}\frac{\partial\dot{x}^j}{\partial\varepsilon}\dot{x}^i\right)dt$$

今设沿 $c=c_0$，t 为弧长，则

$$L'(0)=\frac{1}{2}\int_a^b\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}\dot{x}^j\dot{x}^i\frac{\partial x^k}{\partial \varepsilon}+2g_{ji}\frac{\partial^2 x^j}{\partial t\partial \varepsilon}\dot{x}^i\right)_{\varepsilon=0}dt$$

右边的第二项作分部积分得

$$L'(0)=\left[\left(g_{ji}\frac{\partial x^j}{\partial \varepsilon}\dot{x}^i\right)_{\varepsilon=0}\right]_a^b-\int_a^b\left\{\frac{d}{dt}(g_{ki}\dot{x}^i)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}\dot{x}^j\dot{x}^i\right\}_{\varepsilon=0}\left(\frac{\partial x^k}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}dt=\left[\left(g_{ji}\frac{\partial x^j}{\partial \varepsilon}\dot{x}^i\right)_{\varepsilon=0}\right]_a^b$$

$$-\int_a^b\left\{g_{ki}\ddot{x}^i+\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^j\dot{x}^i\right\}_{\varepsilon=0}\left(\frac{\partial x^k}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}dt$$

$$\therefore\quad L'(0)=\left[\left(g_{ji}\frac{\partial x^j}{\partial \varepsilon}\dot{x}^i\right)_{\varepsilon=0}\right]_a^b-\int_a^b\left\{g_{kh}\left(\ddot{x}^h\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left\{{h \atop ji}\right\}\dot{x}^j\dot{x}^i\right)\right\}_{\varepsilon=0}\left(\frac{\partial x^k}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}dt \qquad (29.2)$$

特别是 $c_\varepsilon(a)=c(a), c_\varepsilon(b)=c(b)\quad(-\alpha\leqslant t\leqslant\alpha)$成立时，这种变分叫做**固定端点的变分**。对于固定端点的变分

$$(\partial x^j/\partial\varepsilon)_{t=a}=0,$$

$$(\partial x^j/\partial\varepsilon)_{t=b}=0$$

故(29.2)变为

$$L'(0)=-\int_a^b(\nabla_{c'}c', v)\,dt \qquad (29.3)$$

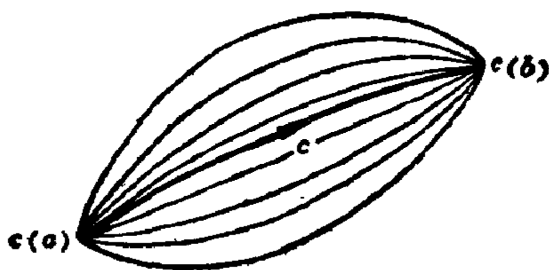


图 5.26

式中，沿 c 的向量场 v 是由

$$v(t)=(\partial x^k/\partial\varepsilon)_{\varepsilon=0}(\partial/\partial x^k)_{c(t)}$$

定义的.又此向量场 v 叫做**变分向量**.故对于任意固定端点的变分 φ，如果$L'(0)=0$,那末对于任意的 v, $L'(0)=0$ 成立。故由 (29.3) 可得

$$\nabla_{c'}c'=0$$

总结之，得到下列定理。

定理 5.24 关于 C^∞ 曲线 c，对于其任意固定端点的变分，$L'(0)=0$ 的充要条件是 c 为测地线。

定理 5.25 如果 C^∞ 曲线 c 在连结其两端点的曲线中是长度最短的，那末 c 是测地线。

《注意》 定理 5.25 之逆并不正确。例如考虑通过球面 S^2 上两点 A, C 的大圆，如图 5.27 的两个大圆弧 ABC 与 ADC，它们都是测地线。如果 A 不是 C 的对径点，那末 ABC 是连结 A 与 C 的短程线，但 ADC 却不是连结 A 与 C 的短程线。如果 A 为 C 的对径点时，那末连结 A 与 C 的短程线有无穷多。

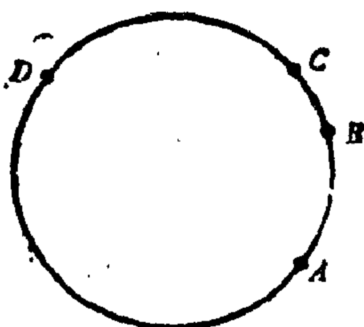


图 5.27

极小曲面 设 E^3 里的局部曲面 $S: D \to E^2$ 的方程为

$$x = x(u^1, u^2).$$

又设 S 的边界 ∂S 为简单闭曲线 c。考虑绝对值充分小的数 ε 以及 S 上的 C^∞ 函数 r。于是作局部曲面

$$x = \bar{x}(u^1, u^2)$$

以 S_ε 表示之。但

$$\bar{x} = x(u^1, u^2) + \varepsilon r(u^1, u^2) N \tag{29.4}$$

图 5.28

N 为 S 的单位法向量，又 S_ε 叫做 S 的**变分曲面**。再者

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u^i} = \frac{\partial x}{\partial u^i} + \varepsilon\left(r \frac{\partial N}{\partial u^i} + r_i N\right), \quad r_i = \frac{\partial r}{\partial u^i}$$

故设 S 与 S_ε 的第一基本量分别为 g_{ji} 与 $\bar{g}_{ji}$，则

$$\bar{g}_{ji} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^j} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^i} = \left[\frac{\partial x}{\partial u^j} + \varepsilon\left(r \frac{\partial N}{\partial u^j} + r_j N\right)\right] \cdot \left[\frac{\partial x}{\partial u^i}\right.$$

$$\left. + \varepsilon\left(r \frac{\partial N}{\partial u^i} + r_i N\right)\right] = \frac{\partial x}{\partial u^j} \cdot \frac{\partial x}{\partial u^i} + \varepsilon r\left(\frac{\partial x}{\partial u^j} \cdot \frac{\partial N}{\partial u^i} + \right.$$

$$+\frac{\partial x}{\partial u^i}\frac{\partial N}{\partial u^j}\Big)+\varepsilon^2\Big(r\frac{\partial N}{\partial u^j}+r_jN\Big)\cdot\Big(r\frac{\partial N}{\partial u^i}+r_iN\Big)$$

然由温加顿公式得

$$\frac{\partial x}{\partial u^j}\cdot\frac{\partial N}{\partial u^i}=\frac{\partial x}{\partial u^j}\cdot\Big(-H_i{}^h\frac{\partial x}{\partial u^h}\Big)=-H_i{}^hg_{hj}=-H_{ij}$$

故下式成立。

$$\therefore\quad \overline{g}_{ji}=g_{ji}-2\varepsilon rH_{ji}+(\varepsilon\text{ 的二次项})$$

$$\therefore\quad \det(\overline{g}_{ji})=\det(g_{ji}-2\varepsilon rH_{ji})+(\varepsilon\text{ 的二次以上各项})$$

$$\therefore\quad \Big(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\sqrt{\det(\overline{g}_{ji})}\Big)_{\varepsilon=0}=\frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ji})}}\Big(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\det\overline{g}_{ji})\Big)_{\varepsilon=0}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ji})}}\left(\begin{vmatrix}-2rH_{11} & -2rH_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}g_{11} & g_{12}\\ -2rH_{12} & -2rH_{22}\end{vmatrix}\right)$$

故得下式

$$\Big(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\sqrt{\det(\overline{g}_{ji})}\Big)_{\varepsilon=0}=-r(H_{ji}g^{ji})\sqrt{\det(g_{ji})}\qquad(29.5)$$

式中运用了

$$g^{11}=\frac{g_{22}}{g},\ g^{12}=g^{21}=-\frac{g_{12}}{g}=-\frac{g_{21}}{g},\ g^{22}=\frac{g_{11}}{g},\ g=\det(g_{ji})$$

再设 S_ε 的面积为 $A(\varepsilon)$，则

$$A'(0)=\Big(\frac{dA(\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big)_{\varepsilon=0}=\iint_D\Big(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\sqrt{\det(\overline{g}_{ji})}\Big)_{\varepsilon=0}du^1du^2$$

将(29.5)代入此式得

$$A'(0)=-2\iint_D rh\sqrt{\det(g_{ji})}\,du^1du^2\qquad(29.6)$$

式中

$$2h=H_{ji}g^{ji}$$

为 S 的平均曲率。如果假设 $A'(0)=0$ 对于任意的 C^∞ 函数 r 成立，则由(29.6)可见

$$h=0$$

成立。总结之，得下列定理。

定理 5.26 在 E^3 里的曲面 S 上以简单闭曲线为边界的任意域 D 按(29.4)发生变化，则 $A'(0)=0$ 的充要条件是 S 为**极小曲面**($h=0$ 的曲面)．但 $A(\varepsilon)$ 是 D 的变分曲面 D_ε 的面积。

§30 黎 曼 面

在二维流形 M 的图册 $\mathscr{B}$ 的元 (U,θ,O) 里取坐标系 (x,y)。令 $z=x+\sqrt{-1}\,y$，将 U 看做复平面(z 平面)的开集。这时，z 叫做坐标邻域 O 的**复坐标**。再取 $\mathscr{B}$ 的元 (U',θ',O')，设在 U' 里的坐标系为 (x',y')．令 $z'=x'+\sqrt{-1}\,y'$ 时，将 U' 看做复平面(z' 平面)的开集。即 z' 为 O' 里的复坐标。这时，设 $O\cap O'\neq\varnothing$，将

$$\theta'\circ\theta^{-1}:\theta(O\cap O')\to\theta'(O\cap O')$$

用复坐标写做

$$z'=z'(z) \tag{30.1}$$

假设右边的函数 $z'(z)$ 为复变数 z 的正则函数．当 M 满足上述各条件时，M 叫做**黎曼面**。

上述(30.1)叫做 $O\cap O'$ 里的**坐标变换**。将(30.1)用实坐标 (x,y) 与 (x',y') 的关系记之，设为

$$x'=x'(x,y),\quad y'=y'(x,y) \tag{30.2}$$

因为 $z'=x'+\sqrt{-1}\,y'$ 为 $z=x+\sqrt{-1}\,y$ 的正则函数，所以柯西·黎曼方程

$$\frac{\partial x'}{\partial x}=\frac{\partial y'}{\partial y},\quad \frac{\partial x'}{\partial y}=-\frac{\partial y'}{\partial x}$$

成立。故在 $O\cap O'$ 里

$$\frac{\partial(x',y')}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\partial x'/\partial x & \partial y'/\partial x\\ \partial x'/\partial y & \partial y'/\partial y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\partial x'/\partial x & \partial y'/\partial x\\ -\partial y'/\partial x & \partial x'/\partial x\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2=\left|\frac{dz'}{dz}\right|^2\geqslant 0$$

然因在 $O\cap O'$ 里 $\partial(x',y')/\partial(x,y)\neq 0$，故

$$\left|\frac{dz'}{dz}\right|^2=\frac{\partial(x',\ y')}{\partial(x,\ y)}>0$$

总结之，可得下列定理。

定理 5.27 黎曼面总是有向的。

例 30.1 黎曼球面 考虑 E^3 里的球面 $S^2: x^2+y^2+z^2-z=0$。设从 S^2 去掉点 $N(0,0,1)$ 而得的域为 D，考虑例 15.1 里说明的（以点 N 为极的）极射影 $f: D\to E^2$（xy 平面），对于 D 的任意点 P，设 $f(P)=(x,\ y)$，以复数 $\zeta=x+\sqrt{-1}\ y$ 与之对应，则在 D 与（复的）ζ 平面间建立一一对应。定义此 ζ 为 D 里的复坐标。其次，设从 S^2 去掉 $O(0,0,0)$ 而得的域为 D'。考虑以点 O 为极的极射影 $\varphi: D'\to E^2$（平面 $z=1$），对于 D' 的任意点 P，$\varphi(P)=(x',y',1)$ 时，以复数 $\zeta'=x'+\sqrt{-1}\ y'$ 与之对应，则 D' 与（复的）ζ' 平面之间建立一一对应。定义此 ζ' 为 D' 里的复坐标。这时，取 $D\cap D'$ 里的任意点 P，设 P 在 D 与 D' 里的复坐标分别为 ζ 与 ζ'。在图 5.29 里，$\triangle OQN$ 与 $\triangle NOQ'$ 相似，所以

$$1:|\zeta|=|\zeta'|:1$$

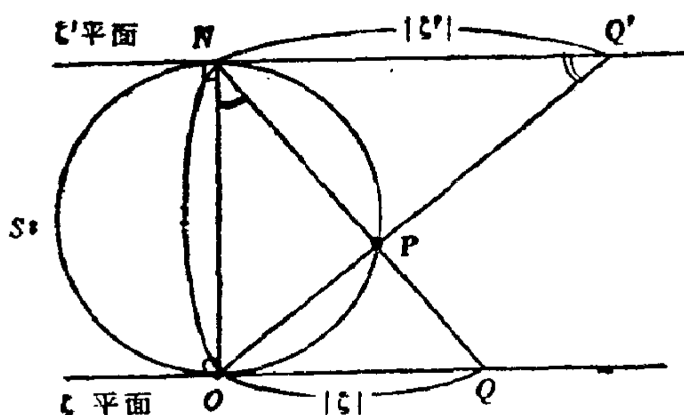


图 5.29

故

$$|\zeta'|=|\zeta|^{-1}$$

因此

$$\zeta'=1/\zeta$$

这是在 $D\cap D'$ 里的坐标变换，是 ζ 的正则函数。这样，S^2 变为黎曼面。此黎曼面叫做**黎曼球面**。

例 30.2 复平面 z 平面（$z=x+\sqrt{-1}\ y$）自己或其任意的开域 D 为黎曼面。

例 30.3 环面 在 z 平面上取两个线性无关的（关于实系数的）复数 ζ_1 与 ζ_2。当 z 平面上的两点 z 与 z' 满足关系

$$z' = z + m\zeta_1 + n\zeta_2$$

（m 与 n 为整数）时，以 $z \sim z'$ 表示这个事实，就说 z 与 z' 等价。此关系～显然是等价关系。将 z 平面按～分类而得等价类$[z]$的全体之集作成二维环面。此环面以 $T(\zeta_1, \zeta_2)$表示。它是黎曼面。

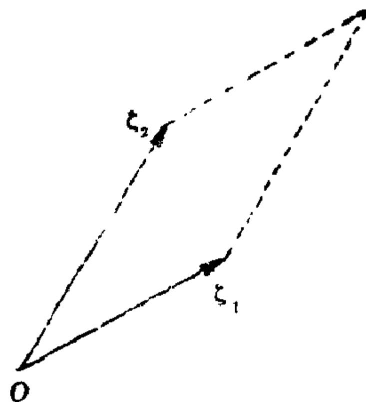


图 5.30

保角映射 假设有从黎曼面R到黎曼面S上的微分同胚映射 $f:R\to S$。取R的任意坐标邻域O与S的任意坐标邻域 O'。设 $f(O)\cap O'\neq\varnothing$。又设在$O$与 O' 里的复坐标分别为 z 与 w。这时 f 的局部表示可用

$$w = w(z)$$

表示，特别是假设 $w(z)$为正则函数。还设 $f^{-1}:S\to R$ 也满足相同条件。这时 $f:R\to S$ 叫做**保角映射**，又说二黎曼面R与S**保角等价**。

例 30.4 z 平面C与C上的单位开圆盘$D=\{z \mid |z|<1\}$都是二维流形，而且微分同胚。但它们做为黎曼面并非保角等价，试证明之。

〈解答〉 任意取 $z\in D$，令

$$w = \frac{z}{1-|z|^2}$$

以对应 $z\mapsto w$ 定义映射 $\varphi:D\to C$，显然φ是流形的微分同胚映射。故C与D做为二维流形是微分同胚的。

再假设C与D是保角等价。这时，存在某保角映射 $f:C\to D$。对于任意的 $z\in C$，令

$$w = f(z)\in D$$

则 $f(z)$是在 z 平面C的整体上定义的正则函数，而且$|f(z)|<1$。然由复变函数论的定理知，

如果在C的整体上正则函数 $F(z)$有界（$|F(z)|$有界），那末 $F(z)$

是常数。

故上面考虑的 $f(z)$ 必须是常数。故在 $f: C \to D$ 下，$f(C) \neq D$。与 f 是从 C 到 D 上的映射矛盾。因此 C 与 D 并非保角同胚。　　（证毕）

人们知道与例 30.4 有关系的下列定理，但略其证明。

定理 5.28　如果黎曼面 S 做为二维流形与 z 平面 C 微分同坯，则 S 与 C 或 $D = \{z \mid |z| < 1\}$ 之一保角等价。

例 30.5　对于环面 $T(\zeta_1, \zeta_2)$（参照例 30.3）人们知道下列事实：两个环面 $T(\zeta_1, \zeta_2)$ 与 $T(\eta_1, \eta_2)$ 保角等价的充要条件是

$$|\zeta_1| : |\zeta_2| = |\eta_1| : |\eta_2|$$

但是，任意两个环面 $T(\zeta_1, \zeta_2)$ 与 $T(\eta_1, \eta_2)$ 做为二维流形是微分同胚的。

等温坐标　对于二维黎曼空间 (M, g) 的坐标邻域 O 里的坐标系 (x, y)，设其线素是

$$ds^2 = \rho(x, y)(dx^2 + dy^2),\ \rho(x, y) > 0 \qquad (30.3)$$

式中函数 ρ 在 O 里是 C^∞ 函数。这时，坐标系 (x, y) 叫做**等温坐标**。

对于 (M, g) 的图册 $\mathscr{A}$ 的每个元 (U, θ, O)，假设在坐标邻域 O 里能够定义等温坐标 (x, y)。这时，对于 $\mathscr{A}$ 的其他元，设 O' 里的等温坐标为 (x', y')。

在 O 里，令

$$z = x + \sqrt{-1}\, y$$

在 O' 里，令

$$w = x' + \sqrt{-1}\, y'$$

设

$$ds^2 = \rho(dx^2 + dy^2) = \rho\, dz\, d\bar{z} \qquad \Big| \qquad ds^2 = \mu(dx'^2 + dy'^2) = \mu\, dw\, d\bar{w}$$

因度量张量 g 的分量为

$$E = G = \rho,\ F = 0 \qquad \Big| \qquad E' = G' = \mu,\ F' = 0$$

故在 $O \cap O'$ 里，度量张量的分量的变换式为

$$\rho = \mu\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2\right], \quad \rho = \mu\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$(30.4)$$

$$0=\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}$$

如果假设(M, g)有向，图册 $\mathscr{B}$ 给M以方向，则

$$\frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)}>0 \tag{30.5}$$

从(30.4)与(30.5)可得

$$\frac{\partial x'}{\partial x}=\frac{\partial y'}{\partial y}, \quad \frac{\partial x'}{\partial y}=-\frac{\partial y'}{\partial x}$$

如果在 $O\cap\overline{O}$ 里令 $z=x+\sqrt{-1}\,y$，$w=x'+\sqrt{-1}\,y'$，则坐标变换

$$x'=x'(x, y), \quad y'=y'(x, y)$$

就可写做

$$w=w(z)$$

右边的函数 $w(z)$ 是 z 的正则函数。总结以上事实，可得下列引理。

引理 5.29 如果二维黎曼空间(M, g)有向，在其各坐标邻域O里存在等温坐标，那末在M上可定义黎曼面的结构。

下列定理的证明相当费工夫，故略其证明。

定理 5.30 在二维黎曼空间各点的充分小坐标邻域里存在等温坐标。

因为二维流形上必存在黎曼度量，所以从引理 5.29 与定理 5.30 可得下列定理。

定理 5.31 如果二维流形M有向，那末在M上存在黎曼面的结构。

《**注意**》黎曼面在高维上的推广有**复流形**。

习 题 五

1. 试证以下性质。

(1) 如果黎曼空间(M, g)里的向量场X平行，则

$$R_{kji}{}^{h}X^{i}=0$$

但 X^i 为X的分量。

(2) 在黎曼空间(M, g)上有 r 个平行向量场 $X_{(1)},\cdots,X_{(r)}$，如果它们在M的一点线性无关，那末它们在M上的各点线性无关。

(3) 如果在 n 维黎曼空间(M, g)上存在 n 个平行向量场 $X_{(1)}$，$\cdots,X_{(n)}$，它们在M的一点是线性无关，那末(M,g)的曲率张量为 0。

2. 在习题四之 6 (p.150) 里，对于(1，1)阶张量场F，定义了它的奈因亥斯张量N。设F的分量为$F_i{}^h$，则在此黎曼空间上，此N的分量由下式决定。试证明之。

$$N_{ji}{}^h = F_j{}^k\nabla_k F_i{}^h - F_i{}^k\nabla_k F_j{}^h - (\nabla_j F_i{}^k - \nabla_i F_j{}^k)F_k{}^h$$

3. 如果在黎曼空间里，G是对称（或反称）(0，2)阶张量场，试证 $\nabla_X G$ 是对称（或反称）(0,2)阶张量场。但X为任意向量场。

4. 试证下列性质。

(1) 对于黎曼空间上的 C^∞ 函数 f，下式成立。

$$\frac{1}{2}\Delta f^2 = f\Delta f + \|df\|^2$$

(2) 设X为向量场。这时，下式成立。

$$\mathrm{div}(fX) = f\mathrm{div}X + (\mathrm{grad}f, X)$$

(3) 对于两个 C^∞ 函数 f，g，下式成立。

$$\mathrm{div}(f\mathrm{grad}g) = f\Delta g + (\mathrm{grad}f,\ \mathrm{grad}g)$$

$$f\Delta g - g\Delta f = \mathrm{div}(f\mathrm{grad}g - g\mathrm{grad}f)$$

但 $\mathrm{grad}f$ 表示以

$$X^h = g^{hi}(\partial f/\partial x^i)$$

为分量的向量场X。

5. 在黎曼空间里，对于利齐张量 R_{ji}，如果

$$\nabla_j R_{ih} + \nabla_i R_{hj} + \nabla_h R_{ji} = 0$$

成立，则其数量曲率 k 一定。试证明之。

6. 在n维黎曼空间(M,g)里，设二阶共变张量 T 的分量为 T_{ji}，令

$$\|T\|^2 = (T,\ T) = g^{jq}g^{ip}T_{ji}T_{qp},\quad \|T\| \geqslant 0$$

试证以下事实，其中设 k 为数量曲率，g 为度量张量。

(1) $$\left\|\mathrm{Ric}-\frac{k}{n}g\right\|^2=\left\|\mathrm{Ric}\right\|^2-\frac{k^2}{n}\geqslant 0$$

(2) (M, g)为爱因斯坦空间的充要条件是

$$\|\mathrm{Ric}\|^2=\frac{k^2}{n}.$$

7. 设 E^3 里的曲面上任意点 P 在 E^3 里的坐标为$(x(P), y(P), z(P))$，根据对应 $x: P\mapsto x(P)$可定义 C^∞ 函数 x。同理定义C^∞函数 y 与 z。此曲面为极小曲面（平均曲率 $h=0$）的充要条件是

$$\Delta x=0,\quad \Delta y=0,\quad \Delta z=0$$

试证明之。

8. 如果沿黎曼空间(M, g)的测地线 c（参数为弧长 s），向量场X满足微分方程

$$\nabla_{c'}\nabla_{c'}X-R(c', X)c'=0$$

时，X叫做**雅可比向量**。试证下列事实。

(1) 如果 $X=f(s)c'(s)$为雅可比向量，那末

$$f=as+b\quad (a, b \text{ 为常数})$$

(2) 设X为雅可比向量。在 c 上一点 $c(s_0)$，X为 0，X垂直于 $c'(s_0)$，则X总是垂直于 c'。

(3) 如果(M, g)为曲率K的常曲率空间，设 v 为沿 c 的平行向量场，

当 $K>0$ 时，$X=(a\sin\sqrt{K}s)v$ 为雅可比向量。

当 $K<0$ 时，$X=(a\sinh\sqrt{-K}s)v$ 为雅可比向量。

当 $K=0$ 时，$X=(as)v$ 为雅可比向量。

(4) 如果X与Y是沿 c 的雅可比向量，那末

$$(X, \nabla_{c'}Y)-(\nabla_{c'}X, Y)=\text{常数}$$

(5) 对于雅可比向量X，下式成立。

$$(c', \nabla_{c'}X)=\text{常数}$$

$$(c', X)=as+b\ (a, b \text{ 为常数})$$

(6) 在 c 的不同两点，与 c' 垂直的雅可比向量总与 c' 垂直。

9. 在黎曼空间里，设向量场X的分量为X^h，令$X_i=g_{ih}X^h$。当

$$\nabla_j X_i+\nabla_i X_j=0$$

成立时，X叫做**开玲向量**。试证下列性质。

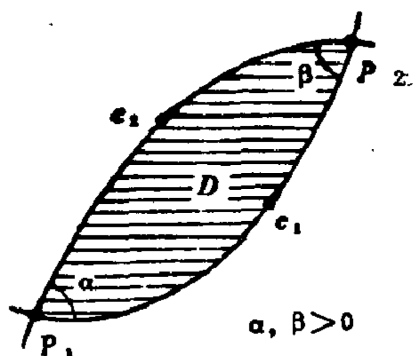
(1) 对于开玲向量X，

$$\mathrm{div}\,X=0。$$

(2) 如果X是开玲向量，那末

$$\nabla_j\nabla_i X^h+R_{kji}{}^h X^k=0。$$

10. 设在二维黎曼空间的各点的邻域里，有二组测地线之族，它们交于定角。这时曲率K是0。试证明之。



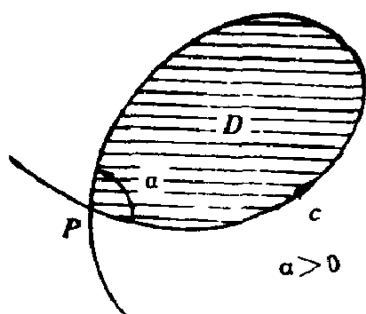


图 5.31

11. 设二维黎曼空间的曲率K满足$K<0$。这时不存在交于两点P_1，P_2的两条测地线c_1，c_2如图 5.31 的上图所示。但设图 5.31 的上图里的D与圆盘同胚。试证明之。

12. 上列习题五之 11 所讲二维黎曼空间里，不存在具有二重点P（自相交的点）的测地线。试证明之。但设在图 5.31 的下图里，D与圆盘同胚。

第六章　同调　上同调

§31　复　　形

单形　对于 R^n 的 $(p+1)$ 个点 $P_0, P_1, \cdots P_p$ $(0<p\leqslant n)$. 当 p 个向量 $\overrightarrow{P_0P_1}, \cdots, \overrightarrow{P_0P_p}$ 线性无关时，就说这 $(p+1)$ 个点是**独立**的. 对于独立的 $P_0, P_1, \cdots, P_p$; R^n 的子集

$$[P_0, P_1, \cdots, P_p] = \{t_0P_0 + \cdots + t_pP_p | t_0, \cdots, t_p > 0,\ t_0 + \cdots + t_p = 1\}$$

叫做**开 p 单形**或简称之为 **p 单形**，而 $[P_0, P_1, \cdots, P_p]$ 的闭包叫做**闭 p 单形**. 特别是一点 $[P_0]$ 叫做 **0 单形**，1 单形是开线段，2 单形是开三角形，3 单形是开四面体. 人们说 p 单形的维是 p. 对于 p 单形 $[P_0, P_1, \cdots, P_p]$，$(p+1)$个 $(p-1)$ 单形 $[P_1, \cdots, P_p]$, $[P_0, P_2, \cdots, P_p]$, $\cdots$, $[P_0, \cdots, P_{i-1}, P_{i+1}, \cdots, P_p]$, $\cdots$, $[P_0, \cdots, P_{p-1}]$ 叫做其**面单形**.

复形　当在 R^n 内的有限个单形的集 K 满足下列条件 (i), (ii) 时，K 叫做**复形**.

(i)　如果单形 σ 包含于 K，则其面单形全包含于 K.

(ii) 单形 σ_1, σ_2 包含于 K，如果 $\sigma_1 \neq \sigma_2$，则 $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \varnothing$.

包含于复形 K 中的单形的最大维叫做 K 的**维**. K 的维用 $\dim K$ 表示.

例 31.1 下列图 6.1 所示者是复形.

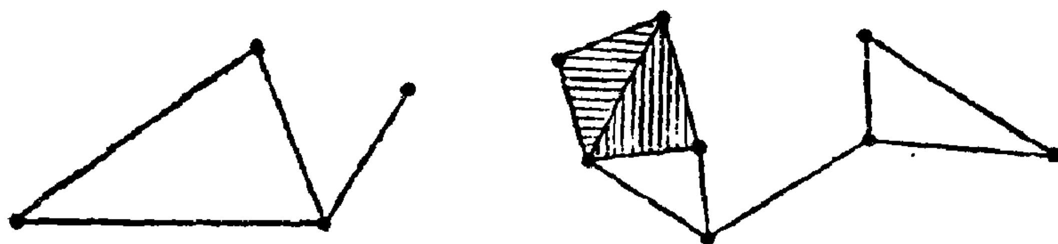


图 6.1

例 31.2 下列图 6.2 所示者不是复形。

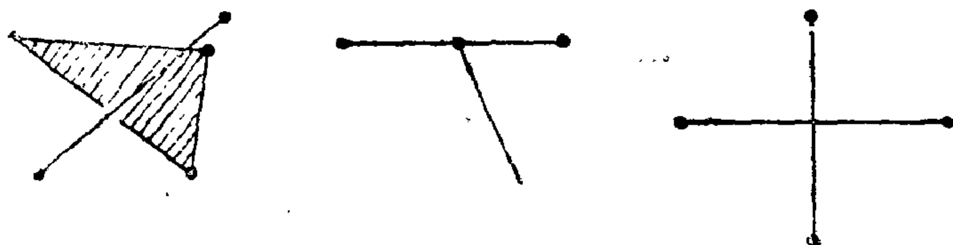


图 6.2

有复形 $K=\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_N\}$ 时，考虑并集

$$[K]=\sigma_1\cup\sigma_2\cup\cdots\cup\sigma_N$$

叫做复形K的**多面体**。从复形的定义可见，$[K]$是紧致的。

有向单形　对于 1 单形$[P_0,P_1]$，在顶点的排列上有(P_0,P_1)，(P_1,P_0)。定义

$$s^1=(P_0,P_1),\ -s^1=(P_1,P_0)$$



s^1 与 $-s^1$ 叫做**有向 1 单形**。又定义

$$-(-s^1)=s^1$$

这时，记做

$$[P_0,P_1]=[s^1]=[-s^1]$$

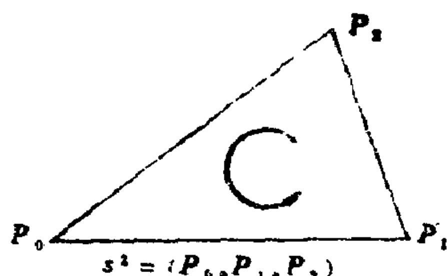


图 6.3

对于 2 单形 $[P_0,P_1,P_2]$，顶点的排列有 6 种，其中令

$$s^2=(P_0,P_1,P_2)=(P_1,P_2,P_0)=(P_2,P_0,P_1)$$

$$-s^2=(P_1,P_0,P_2)=(P_0,P_2,P_1)=(P_2,P_1,P_0)$$



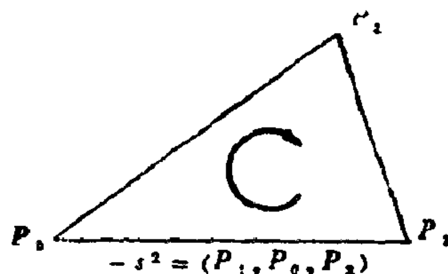


图 6.4

s^2 与 $-s^2$ 叫做**有向 2 单形**。还定义

$$-(-s^2)=s^2$$

这时，又作如下假设

$$[P_0, P_1, P_2] = [s^2] = [-s^2]$$

对于 p 单形$[P_0, P_1, \cdots, P_p]$，顶点的排列有 $p!$ 个。于其中，令

$$s^p = (P_0, P_1, \cdots, P_p)$$

对于$(0, 1, \cdots, p)$的排列 $(h, i, \cdots, l)$，定义

$$(P_h, P_i, \cdots, P_l) = \mathrm{sign}(h, i, \cdots, l) s^p$$

式中 $\mathrm{sign}(h, i, \cdots, l)$是将$(0, 1, \cdots, p)$变为$(h, i, \cdots, l)$时置换的符号。于是 s^p 与 $-s^p$ 叫做**有向 p 单形**。还定义

$$-(-s^p) s^p$$

这时，记做

$$[P_0, P_1, \cdots, P_p] = [s^p] = [-s^p]$$

对于 0 单形 $[P_0]$，定义**有向 0 单形** $s^0 = (P_0)$ 与 $-s^0 = -(P_0)$，并且定义

$$-(-s^0) = s^0$$

为简便记，常常写成 $s^0 = P_0$，$-s^0 = -P_0$。

链 设复形K的维为 n。取一个 $p(0 \leqslant p \leqslant n)$，对于包含于$K$的 p 单形$\sigma_1, \cdots, \sigma_a$，其有向 p 单形 $s_1, \cdots, s_a$ 的整系数线性组合 $c = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_a s_a$叫做 **$p$ 链**。特别是链 $0s_1 + 0s_2 + \cdots + 0s_a$叫做**零 p链**，以 0 记之。K的 p 链全体之集以 $C_p(K)$ 记之。对于 $C_p(K)$ 的任意二元

$$c_1 = \sum_\alpha a_\alpha s_\alpha, \quad c_2 = \sum_\alpha b_\alpha s_\alpha$$

定义其**和** $c_1 + c_2$ 为

$$c_1 + c_2 = \sum_\alpha (a_\alpha + b_\alpha) s_\alpha$$

又对于任意整数 k，定义 c_1 的 **k 倍** kc_1 为

$$kc_1 = \sum_\alpha (k a_\alpha) s_\alpha$$

这样，$C_p(K)$ 是（有限生成的）自由阿贝尔群。$C_p(K)$ 叫做复形K的（整系数）**p 链群**。

边缘 我们定义从 $C_p(K)$ 到 $C_{p-1}(K)$ $(p \geqslant 1)$ 的同态 ∂。首先对于有向 0 单形 s^0，定义

$$\partial s^0 = 0$$

其次，对于有向 1 单形 $s^1 = (P_0, P_1)$定义

$$\partial s^1 = P_1 - P_0$$

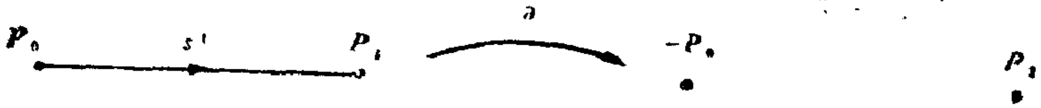


图 6.5

再对于有向 2 单形 $s^2 = (P_0, P_1, P_2)$，定义

$$\partial s^2 = (P_1, P_2) - (P_0, P_2) + (P_0, P_1)$$

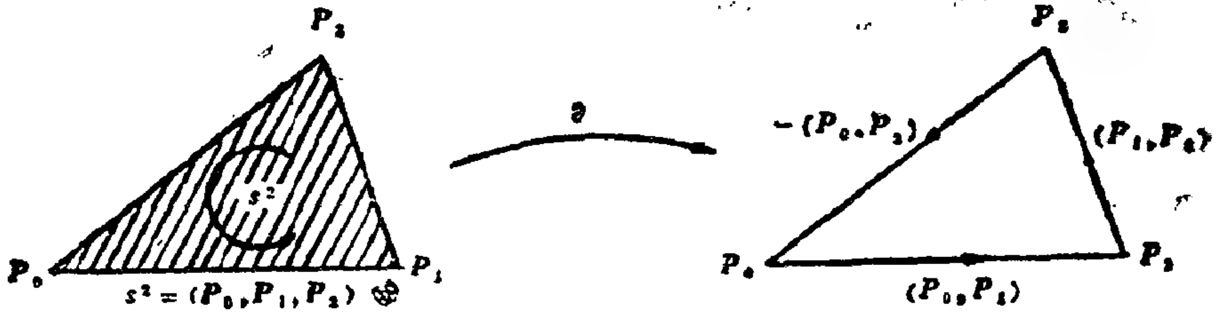


图 6.6

一般地说，对于有向 p 单形 $s^p = (P_0, P_1, \cdots, P_p)$，定义

$$\partial s^p = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (P_0, \cdots, P_{i-1}, P_{i+1}, \cdots, P_p)$$

至于对于 p 链

$$c = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_\alpha s_\alpha$$

定义

$$\partial c = a_1 \partial s_1 + a_2 \partial s_2 + \cdots + a_\alpha \partial s_\alpha$$

这时，显然映射

$$\partial : C_p(K) \to C_{p-1}(K), \quad (p \geqslant 1); \quad \partial : C_0(K) \to \{0\}$$

是同态，即得到下列同态序列。

$$C_n(K) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_1(K) \xrightarrow{\partial} C_0(K) \to \{0\}$$

对于 p 链 c 来说，$(p-1)$ 链 ∂c 叫做它的**边缘**。

公式 $$\partial^2=\partial\partial=0 \tag{31.1}$$

〈**证明**〉 对于1链c^1，∂c^1是0链，所以

$$\partial^2 c^1=\partial(\partial c^1)=0$$

其次，对于有向2单形 $s^2=(P_0,P_1,P_2)$，

$$\partial^2 s^2=\partial(\partial s^2)=\partial((P_1,P_2)-(P_0,P_2)+(P_0,P_1))$$
$$=(P_2-P_1)-(P_2-P_0)+(P_1-P_0)=0$$

故对于2链 c^2，下式成立：

$$\partial^2 c^2=0$$

再对于有向3单形 $s^3=(P_0,P_1,P_2,P_3)$，

$$\partial^2 s^3=\partial\{(P_1,P_2,P_3)-(P_0,P_2,P_3)+(P_0,P_1,P_3)-(P_0,P_1,P_2)\}$$
$$=\{(P_2,P_3)-(P_1,P_3)+(P_1,P_2)\}-\{(P_2,P_3)$$
$$-(P_0,P_3)+(P_0,P_2)\}+\{(P_1,P_3)-(P_0,P_3)$$
$$+(P_0,P_1)\}-\{(P_1,P_2)-(P_0,P_2)+(P_0,P_1)\}=0$$

故对于3链 c^3，下式成立。

$$\partial^2 c^3=0$$

以下同理，对于任意 p 链 c^p，下式成立：

$$\partial^2 c^p=0$$ （证毕）

§32 同 调

当复形K的 p 链 c^p 满足

$$\partial c^p=0$$

时，则 c^p 叫做 **p 闭链**。p 闭链全体的集以 $Z_p(K)$ 表示，叫做（整系数）**闭链群**。因为 $Z_p(K)$ 是同态 $\partial: C_p(K)\to C_{p-1}(K)$ 的核，故 $Z_p(K)$ 是 $C_p(K)$ 的子群。因0链全是0闭链，故 $Z_0(K)=C_0(K)$。

对于 p 链 c^p，如果存在 $(p+1)$ 链 c^{p+1} 满足

$$c^p=\partial c^{p+1}$$

时，则c^p 叫做 **p 边缘链**（因为 $\partial c^p=\partial^2 c^{p+1}=0$，所以 c^p 是闭链）。p 边缘链全体的集以$B_p(K)$表示，叫做（整系数）**边缘链群**。因为$B_p(K)$

$=\partial C_{p+1}(K)$，所以 $B_p(K)$ 是 $Z_p(K)$ 的子群。而商群 $H_p(K)=Z_p(K)/B_p(K)$ 叫做复形K的**整系数 p 维同调群**(homology group)。因为 $C_p(K)$ 是有限生成的，所以 $H_p(K)$ 也是有限生成的阿贝尔群。

若对于两个 p 闭链 z_1, z_2，存在 $(p+1)$ 链 c 使 $z_1-z_2=\partial c$ 时，就说 z_1 与 z_2 **同调**，这时以 $z_1\sim z_2$ 表示。对于 p 闭链 z，$z=\partial c$(c 是 $(p+1)$链)时，就说 z 同调于 0。以 $z\sim 0$ 记之。将 p 闭链群 $Z_p(K)$按等价关系～分类而得的等价类叫做**同调类**，同调类全体形成**同调群** $H_p(K)$。

例 32.1 在图 6.7 的二维复形里，设

$$z_1=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4$$

$$z_2=s_1+s_2+s_3+s_4$$

则 $z_1\sim z_2$。

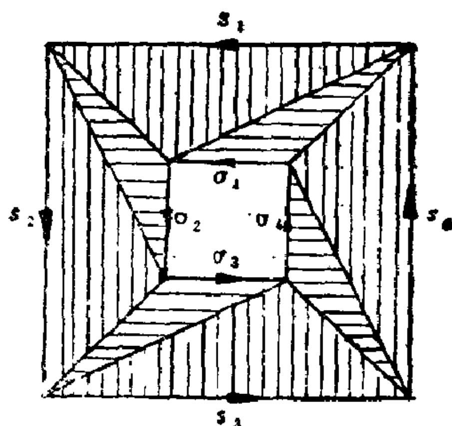


图 6.7

复形K的整系数链群，整系数闭链群，整系数边缘链群，整系数同调群常分别以 $C_p(K,\boldsymbol{Z})$，$Z_p(K,\boldsymbol{Z})$，$B_p(K,\boldsymbol{Z})$，$H_p(K,\boldsymbol{Z})$ 表示。式中$\boldsymbol{Z}$表示整数全体的集。对于阿贝尔群，在代数学里，有众所周知的定理如下，其证明从略。

定理 6.1 对于复形K与各整数 $p(0\leqslant p\leqslant \dim K)$，整系数 p 维同调群 $H_p(K,\boldsymbol{Z})$ 可直和分解为

$$H_p(K,\boldsymbol{Z})=U_1+\cdots+U_{\rho(p)}+V_1+\cdots+V_{\sigma(p)}$$

式中

$U_\alpha\approx\boldsymbol{Z}$ (无限循环群) $\qquad (1\leqslant\alpha\leqslant\rho(p))$

$V_\beta\approx\boldsymbol{Z}/(\tau_\beta{}^p\boldsymbol{Z})$ (阶数 $\tau_\beta{}^p$ 的循环群)，$(1\leqslant\beta\leqslant\sigma(p))$

而 $\tau_\beta{}^p$ 被 $\tau_{\beta+1}{}^p$ 除尽 (符号$\approx$表示同构)。

上述定理里出现的整数 $\rho(p)$ 叫做复形 K 的**整系数贝蒂数**，以 $\beta_p(K)$或$\beta_p(K,\boldsymbol{Z})$ 表示。$\tau_1{}^p,\cdots,\tau_\sigma{}^p$ 叫做 r **维挠系数**。$H_p(K,\boldsymbol{Z})$的有限阶数的元全体而成的子群

$$V_1+\cdots+V_{\sigma(p)}\approx\boldsymbol{Z}/(\tau_1{}^p\boldsymbol{Z})+\cdots+\boldsymbol{Z}/(\tau_{\sigma(p)}{}^p\boldsymbol{Z})$$

叫做 $H_p(K,\boldsymbol{Z})$ 的**挠子群**。

例 32.2 对于复形K，如果〔K〕是连通的，则

$$H_0(K,\boldsymbol{Z})\approx\boldsymbol{Z}$$

试证明之（≈表示同构）。

〈解答〉 因为 $C_0(K,\boldsymbol{Z})=Z_0(K,\boldsymbol{Z})$，所以 $H_0(K,\boldsymbol{Z})=C_0(K,\boldsymbol{Z})/B_0(K,\boldsymbol{Z})$。如果任意取$K$的两个顶点 P,Q，因〔K〕连通，故存在K的顶点 $P_0=P,P_1,\cdots,P_r=Q$，而且存在K的有向 1 单形(P_0,P_1)，$(P_1,P_2),\cdots,(P_{r-1},P_r)$．于是得

$$Q-P=\partial[(P_0,P_1)+(P_1,P_2)+\cdots+(P_{r-1},P_r)]$$

因此 $P\sim Q$。从而如果任意取K的 0 链 $c=a_1s_1+\cdots+a_rs_r$（$s_1,\cdots,s_r$ 表示K的所有顶点），且设 $s_1=P$，则

$$c\sim(a_1+\cdots+a_r)P$$

故
$$H_0(K,\boldsymbol{Z})\approx\boldsymbol{Z}$$
（证毕）

《注意》 如果〔K〕具有 m 个连通分支，则下式成立。

$$H_0(K,\boldsymbol{Z})\approx\underbrace{\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{Z}+\cdots+\boldsymbol{Z}}_{m\text{个}}$$

例 32.3 对于由三角形的三边与顶点而成的复形K，试证下式。

$$H_0(K,\boldsymbol{Z})\approx\boldsymbol{Z},\quad H_1(K,\boldsymbol{Z})\approx\boldsymbol{Z}$$

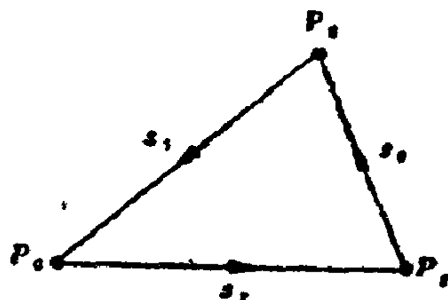


图 6.8

〈解答〉 由例 32.2 可见，

$$H_0(K,\boldsymbol{Z})\approx\boldsymbol{Z}$$

再设 $s_0=(P_1,P_2)$，$s_1=(P_2,P_0)$，$s_2=(P_0,P_1)$．取任意 1 闭链 $z=a_0s_0+a_1s_1+a_2s_2$，因 $\partial z=0$，故

$$\partial z=a_0(P_2-P_1)+a_1(P_0-P_2)+a_2(P_1-P_0)=0$$

$$\therefore\quad a_0=a_1=a_2$$

故任意 1 闭链 z 变为

$$z=a(s_0+s_1+s_2),\quad(a\in\boldsymbol{Z})$$

从而
$$Z_1(K,\boldsymbol{Z})\approx\boldsymbol{Z}$$

然因 $C_2(K,\boldsymbol{Z})=\{0\}$，故 $B_1(K,\boldsymbol{Z})=\partial C_2(K,\boldsymbol{Z})=\{0\}$。于是

$$H_1(K,\boldsymbol{Z})=Z_1(K,\boldsymbol{Z})/B_1(K,\boldsymbol{Z})\approx\boldsymbol{Z}/\{0\}\approx\boldsymbol{Z} \qquad \text{(证毕)}$$

例 32.4 对于由一个三角形，其三边以及其三顶点而成的复形 $\boldsymbol{K}$，试证下式：

$$H_0(K,\boldsymbol{Z})\approx\boldsymbol{Z},\ H_1(K,\boldsymbol{Z})=\{0\},\ H_2(K,\boldsymbol{Z})=\{0\}$$

〈**解答**〉 由例 32.2 可见，

$$H_0(K,\boldsymbol{Z})\approx\boldsymbol{Z}$$

如于例 32.3 中所证，任意 1 闭链 z 变为

$$z=a(s_0+s_1+s_2),\ (a\in\boldsymbol{Z})$$

式中 s_0,s_1,s_2 是例 32.2 的证明中所用符号。

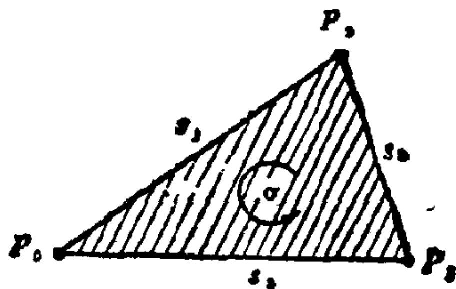


图 6.9

再设 $\sigma=(P_0,P_1,P_2)$，则

$$\partial\sigma=s_0+s_1+s_2$$

故对于任意 1 闭链 z，

$$z=a(s_0+s_1+s_2)=\partial(a\sigma)\sim 0$$

故
$$H_1(K,\boldsymbol{Z})=\{0\}$$

其次，设 c 为任意 2 闭链，则

$$c=a\sigma,\quad (a\in\boldsymbol{Z})$$

然因 $\partial c=0$，故

$$0=\partial c=a\partial\sigma=a(s_0+s_1+s_2),\qquad \therefore\quad a=0$$

即任意 2 闭链 z 是 0，故 $Z_2(K,\boldsymbol{Z})=\{0\}$。因此

$$H_2(K,\boldsymbol{Z})=Z_2(K,\boldsymbol{Z})/B_2(K,\boldsymbol{Z})\approx\{0\} \qquad \text{(证毕)}$$

在以上讨论中，取系数域为 $\boldsymbol{Z}$。但也可取系数域为实数体 $\boldsymbol{R}$，而重新叙述以前所有定义。故可定义**实系数链群** $C_p(K,\boldsymbol{R})$，**实系数闭链群** $Z_p(K,\boldsymbol{R})$，**实系数边缘链群** $B_p(K,\boldsymbol{R})$，**实系数同调群** $H_p(K,\boldsymbol{R})$。$C_p(K,\boldsymbol{R}),Z_p(K,\boldsymbol{R}),B_p(K,\boldsymbol{R})$ 以及 $H_p(K,\boldsymbol{R})$ 是（$\boldsymbol{R}$ 上的）有限维**向量空间**。

贝蒂数 对于复形 K，向量空间 $H_p(K,\boldsymbol{R})$ 的维叫做 K 的 **p 维贝**

蒂数，以 β_p 或 $\beta_p(K)$表示。如所周知下列等式成立。

$$\beta_p(K)=\beta_p(K,Z), \quad (0\leqslant p\leqslant \dim K)$$

欧拉示性数 设n维复形K的0维，1维，…，n 维单形的个数分别为 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，则

$$\chi(K)=\alpha_0-\alpha_1+\cdots+(-1)^p\alpha_p+\cdots+(-1)^n\alpha_n$$

叫做K的**欧拉示性数**。

定理 6.2 对于n维复形K

$$\chi(K)=\beta_0-\beta_1+\cdots+(-1)^p\beta_p+\cdots+(-1)^n\beta_n$$

成立。式中 β_p 为K的p维贝蒂数。

〈证明〉 对于满足 $0\leqslant p\leqslant n$ 的各整数 p，显然

$$\alpha_p=\dim C_p(K,R)$$

而对于同态$\partial: C_p(K,R)\to C_{p-1}(K,R)$，其核 $\mathrm{Ker}\partial$ 与象 $\mathrm{Im}\partial$ 分别为

$$\mathrm{Ker}\partial=Z_p(K,R), \quad \mathrm{Im}\partial=B_{p-1}(K,R)$$

故

$$\begin{aligned}\alpha_p&=\dim C_p(K,R)=\dim\mathrm{Ker}\partial+\dim\mathrm{Im}\partial\\&=\dim Z_p(K,R)+\dim B_{p-1}(K,R) \qquad (32.1)\end{aligned}$$

显然，下列事实成立。

$$\begin{aligned}\beta_p&=\dim H_p(K,R)=\dim[Z_p(K,R)/B_p(K,R)]\\&=\dim Z_p(K,R)-\dim B_p(K,R) \qquad (32.2)\end{aligned}$$

运用上列等式(32.1)与(32.2)，作下列计算。

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\beta_p&=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p[\dim Z_p(K,R)-\dim B_p(K,R)]\\&=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\dim Z_p(K,R)+\sum_{p=0}^{n}(-1)^{p+1}B_p(K,R)\end{aligned}$$

然而，$B_n(K,R)=\{0\}$（因在K里无$(n+1)$单形）．故

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\beta_p=&\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\dim Z_p(K,R)\\&+\sum_{p=1}^{n}(-1)^p\dim B_{p-1}(K,R)\end{aligned}$$

又因，$B_{-1}(K,R)=\{0\}$，所以

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\beta_p=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p[\dim Z_p(K,R)+\dim B_{p-1}(K,R)]$$

$$=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\dim C_p(K,R)=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\alpha_p$$

$$=\chi(K)$$

（证毕）

定理 6.3 对于两个复形K与$\widetilde{K}$，如果它们的多面体$[K]$与$[\widetilde{K}]$同胚，则

$$H_p(K,Z)\approx H_p(\widetilde{K},Z),\qquad H_p(K,R)\approx H_p(\widetilde{K},R)$$

式中 $0\leqslant p\leqslant n=\dim K=\dim\widetilde{K}$,

〈**证明**〉 从略。

定理 6.3 说明同调群是拓扑不变的，故贝蒂数 β_p，挠系数，欧拉示性数是拓扑不变的。

例 32.5 四面体的面单形之集作成二维复形K。试证明下列事实（这时$[K]$与二维球面 S^2 同胚）。

(1) $\chi(K)=2$

(2) $\beta_0=\beta_2=1$

(3) $\beta_1=0$

〈**解答**〉 (1) 设 0，1，2 维单形的个数分别为 α_0，α_1，α_2，则由图 6.10 可见，

$$\alpha_0=4,\quad \alpha_1=6,\quad \alpha_2=4$$

$$\therefore\quad \chi(K)=\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=2$$

(2) 因$[K]$连通，故由例 32.2 可见 $\beta_0=1$。今任取 2 闭链 z，令

$$z=a_1(P_0,P_1,P_2)+a_2(P_0,P_2,P_3)$$
$$+a_3(P_0,P_3,P_1)+a_4(P_1,P_3,P_2)$$

计算 ∂z，并令 $\partial z=0$，则得

$$a_1=a_2=a_3=a_4$$

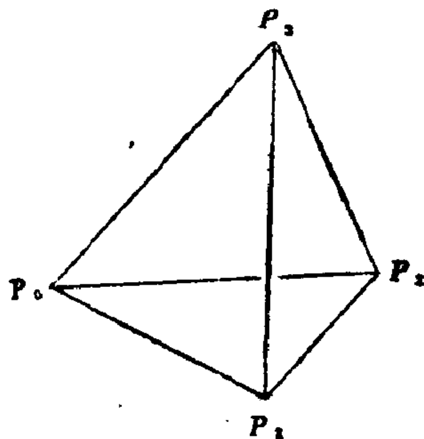


图 6.10

故 $z=a\{(P_0,P_1,P_2)+(P_0,P_2,P_3)+(P_0,P_3,P_1)+(P_1,P_3,P_2)\}$

故 $H_2(K,Z)\approx Z$。即 $\beta_2=1$。

(3) 将 $\beta_0=\beta_2=1$ 代入

$$\beta_0-\beta_1+\beta_2=\chi(K)=2$$

求 β_1 得 $$\beta_1=0$$ (证毕)

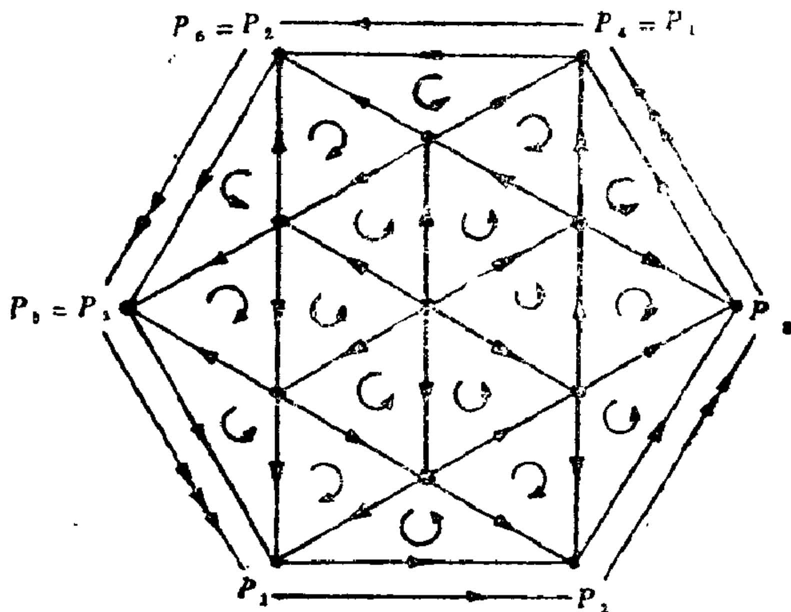


图 6.11

例 32.6 如图6.11所示，剖分正六边形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ 的内部作复形 K'. 将二边 P_1P_2 与 P_4P_5，二边 P_2P_3 与 P_5P_6，二边 P_3P_4 与 P_6P_1 连其方向也包括在内等同起来，则 $P_1=P_4, P_2=P_5, P_3=P_6$。在这样看法之下，得到一个新的复形 K。此 K 的多面体 $[K]$ 与射影平面 P^2 同胚（参照例 17.2）。在 K 里给 2 单形定向如图 6.11，设分别为 $s_1,s_2,\cdots,s_{18}$。试证下列事实。

(1) $H_0(K,Z)\approx Z$， $\beta_0=1$

(2) $H_1(K,Z)\approx Z/(2Z)=Z_2$， $H_1(K,R)=\{0\}$， $\beta_1=0$

(3) $H_2(K,Z)=\{0\}$， $\beta_2=0$

(4) $\chi(K)=1$

〈解答〉 (1) 因为 $[K]$ 连通，故由例 32.2 可见，$H_0(K,Z)\approx Z$. 因此

$$\beta_0=1$$

(2) 给 K 的所有 1 单形定向如图6.11. 如果任取 K 的1闭链 z，则得

$$z=a\{(P_1,P_2)+(P_2,P_3)+(P_3,P_1)\}+z',\ (z'\in B(K,Z),a\in Z)$$

又考虑 2 链

$$c=s_1+s_2+\cdots+s_{18}$$

得 $$\partial c=2\{(P_1,P_2)+(P_2,P_3)+(P_3,P_1)\}$$

故对于上列 1 闭链 z，

如果 $a=2m$， $(m\in \mathbf{Z})$， 则 $z\sim 0$.

如果 $a=2m+1$，$(m\in \mathbf{Z})$ 则 z 不~ 0.

故
$$H_1(K,\mathbf{Z})=C_1(K,\mathbf{Z})/B_1(K,\mathbf{Z})=\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}=\mathbf{Z}_2$$
$$\therefore \quad \beta_1=0$$

(3) 任意取 K 的整系数 2 闭链
$$z=a_1s_1+a_2s_2+\cdots+a_{18}s_{18}$$
计算 ∂z，求正六边形内部的有向 1 单形的系数，考虑 $\partial z=0$，与例 32.5 一样，可得
$$z=a(s_1+s_2+\cdots+s_{18}),\quad (a\in \mathbf{Z})$$
运用 (2) 里得到结果，再计算 ∂z 得
$$0=\partial z=2a\{(P_1,P_2)+(P_2,P_3)+(P_3,P_1)\}$$
$$\therefore \quad 2a=0,\quad a=0$$
故得 $z=0$. 即 $Z_2(K,\mathbf{Z})=\{0\}$。因此
$$H_2(K,\mathbf{Z})=Z_2(K,\mathbf{Z})=\{0\}$$
$$\therefore \quad \beta_2=0$$

(4) $$\chi(K)=\beta_0-\beta_1+\beta_2=1-0+0=1$$ （证毕）

如右侧图 6.12 所示，准备好一个柱面和在球面上开两个洞而得的曲面。将球面上两个洞的边缘即圆 c 与 c' 与圆柱的二边缘即圆 $\bar{c}$ 与 $\bar{c}'$ 分别贴在一起，可得闭曲面 S_1 如图 6.13 的左图所示。这时，就说 S_1 是给球面安上一个把而得的。同理，给球面安上两个把得图 6.13 的右图所示闭曲面 S_2。

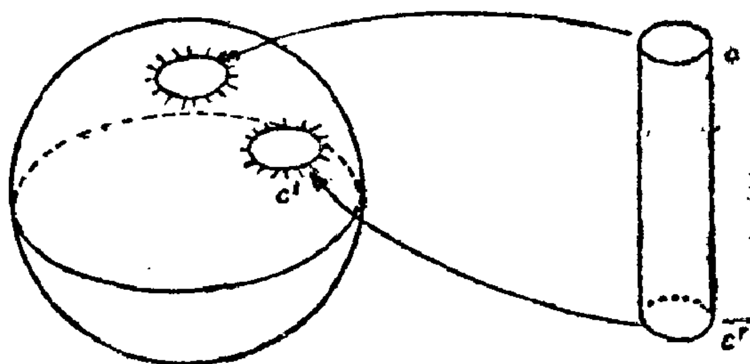


图 6.12

一般地说，设给球面安上 p 个把而得的闭曲面为 $S_p(p=0,1,\cdots)$。图 6.14 所示图形和上列图形是同胚的闭曲面。与闭曲面 S_p 同

胚的多面体〔K〕上作二维复形K，计算其0单形，1单形，2单形的个数。分别用 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ 表示之，可得

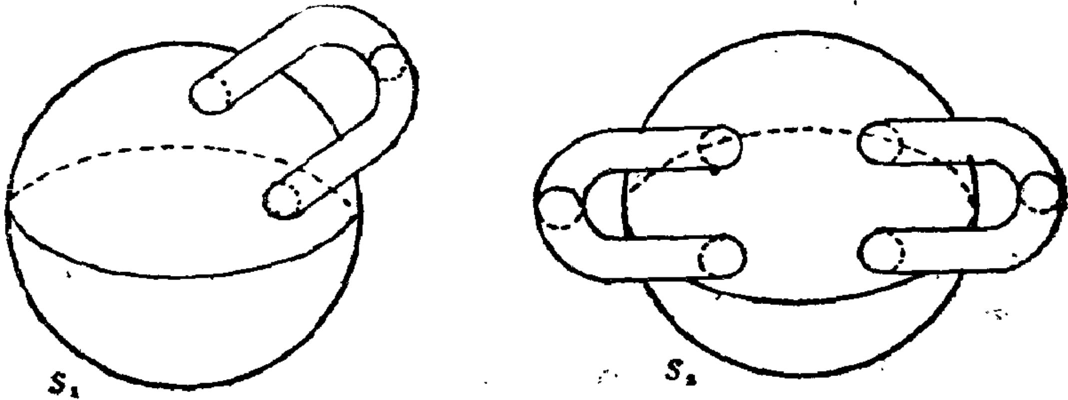


图 6.13

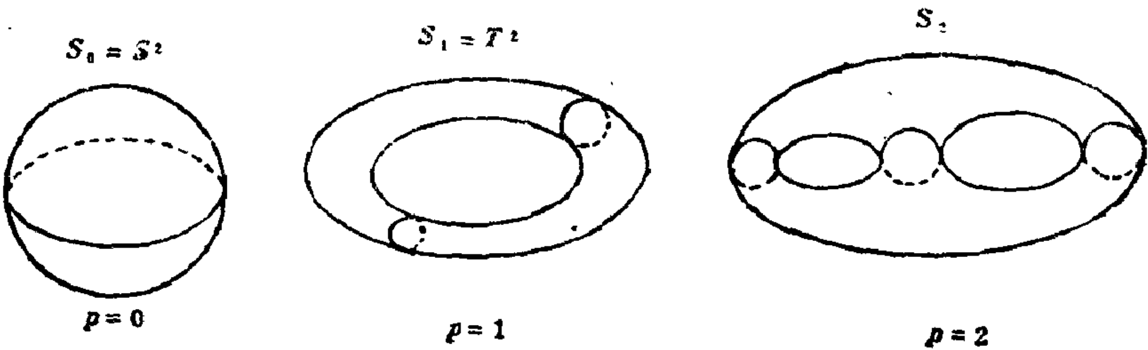


图 6.14

$$\chi(K) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2(1-p)$$

因此下列定理成立。

定理 6.4 对于其多面体〔K〕与闭曲面 S_p 同胚的二维复形K，下式成立。

$$\chi(K) = 2(1-p),\quad \beta_0 = \beta_2 = 1,\quad \beta_1 = 2p,\quad (p = 0,1,2,\cdots)$$

〈**证明**〉 因为〔K〕连通，故由例 32.2 可见，$\beta_0 = 1$。此外，与例32.5 一样可以证明

$$H_2(K,Z) \approx Z$$

故 $\beta_2 = 1$。再由上述事实可见

$$\chi(K) = 2(1-p)$$

因此运用

$$\beta_0-\beta_1+\beta_2=\chi(K)=2(1-p),\quad \beta_0=\beta_2=1$$

则得

$$\beta_1=2p \qquad\qquad \text{(证毕)}$$

人们知道以下事实，但证明从略。

如果有向、紧致的二维流形M是连通的，则与 S_p $(p=0,1,2,\cdots)$ 中的一个同胚。

有向、紧致而且连通的二维流形M与 S_p 同胚，设二维复形K具有与 S_p 同胚的多面体$[K]$. 这时，K的欧拉示性数$\chi(K)$叫做二维流形M的**欧拉示性数**，用$\chi(M)$表示. 而且K的贝蒂数 $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ 叫做M的**贝蒂数**. 这样，有向、紧致的二维流形由其欧拉示性数$\chi(M)$完全（代数拓扑学地）决定。

至于不具有方向的紧致二维流形通过给射影平面安上几个把便可得到，但省略其详细讨论（例 32.6 里讨论的射影平面是不能定向的紧致二维流形）.

§33 流形的三角剖分

设M为二维流形，K为二维复形，$h:[K]\to M$为同胚映射. 还设下列条件成立：对于K的任意有向 2 单形 s，可将h在$[\bar{s}]$（$[s]$ 的闭包）的限制 $h|_{[\bar{s}]}:[\bar{s}]\to M$ 推广成从包含$[\bar{s}]$的平面上的邻域$U(\supset[\bar{s}])$到M的C^∞映射$h_s:U\to M$，$h_s:U\to M$ 是 M的开子流形（二维子流形）. 这时，组(M,K,h)叫做二维流形M的**三角剖分**或**单纯剖分**. 当M能被三角剖分时，因$[K]$是紧致的，故M也是紧致的. 下图 6.15 是说明球面 S^2 的三角剖分的一例. 一般地说，同样定义n维流形的**单纯剖分**. 人们知道，任意紧致流形能够单纯剖分. 其证明略。

设给定了二维流形M的三角剖分(M,K,h). 这时，对于K的 0 单形P，1 单形$[P_0,P_1]$，2 单形$[P_0,P_1,P_2]$；$h(P)$，$h([P_0,P_1])$，$h([P_0,P_1,P_2])$ 分别叫做 M 上的 0 单形，1 单形，2 单形. 以K里的术语

为准，对M定义有向单形，链，边缘，…等术语。这样再定义M的同调群 $H_p(M,Z)$ 与 $H_p(M,R)$ $(p=0,1,2)$。但改变M的三角剖分，根据

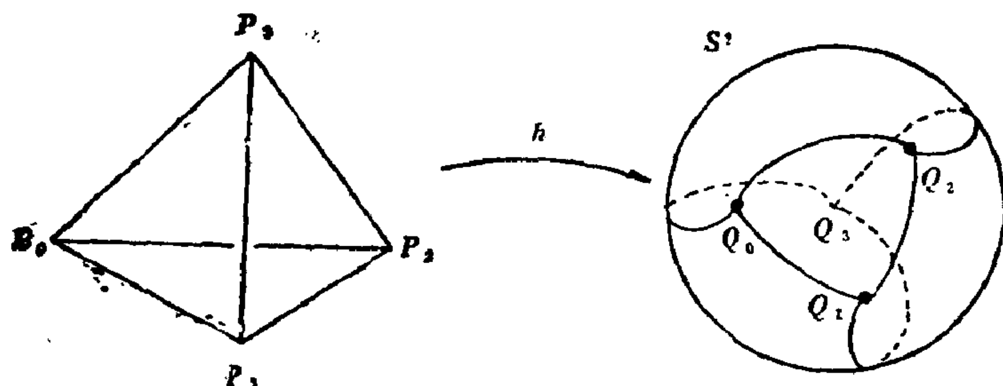


图 6.15

定理 6.3，$H_p(M,Z)$ 与 $H_p(M,R)$并不变化(同胚)。故可定义M的贝蒂数 β_0,β_1,β_2 以及M的欧拉示性数 $\chi(M)$。除此之外，$H_p(M,Z),H_p(M,R),\beta_p,(p=0,1,2)$ 以及 $\chi(M)$ 在二维流形M的同胚映射下不变。

设 (M,K,h) 为二维流形M的三角剖分。这时，对于K的任意顶点P，以P为顶点的K的1单形与2单形全体以及$\{P\}$的并集叫做以P为中心的**星形**（参照图 6.16)。例如取一个星形，设包含于其中的2单形为 $s_1,s_2,\cdots,s_6$，给它们安排适当的顺序使 s_1 与s_2，s_2 与 $s_3,\cdots,s_6$ 与 s_1分别只以一个1单形$[P,Q_1],[P,Q_2],\cdots,[P_1,Q_6]$为公共边缘1单形（参照图 6.16)。一般地说，对于二维复形K的任意0单形$[P]$，当以P为中心的星形有上述性质时，$[K]$叫做**二维多面体流形**。即对于二维流形的三角剖分 (M,K,h)，$[K]$是二维多面体流形。

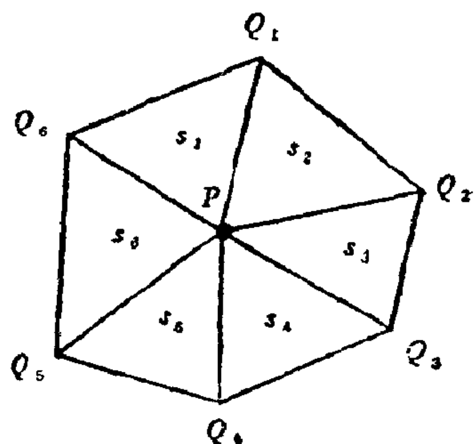


图 6.16

设$[K]$为二维多面体流形。设K的有向2单形s_1与s_2公有一个

边缘1单形(P,Q)。这时就说s_1与s_2相邻。此外，当

$$\partial s_1=(P,Q)+\cdots,\qquad \partial s_2=-(P,Q)+\cdots$$

时，就说两个2单形s_1与s_2的**方向一致**。

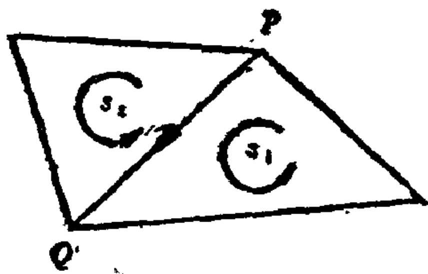


图 6.17

给二维多面体流形$[K]$的所有2单形以适当方向。设它们是$s_1,s_2,\cdots,s_r$。如果此时s_α与s_β相邻，s_α与s_β总有相同方向，就说K或$[K]$**有向**，而且，此时说$s_1,s_2,\cdots s_r$有相同方向。当K有向时，显然K有二种方向，下列事实成立。

当二维流形M有向时，对于M的任何三角剖分(M,K,h)，则多面体$[K]$是有向二维多面体流形。

〈**证明**〉 几乎是显然的。但正确的证明略。

定理 6.5 当二维多面体流形K有向时，下式成立。

$$H_2(K,Z)\approx Z,\quad \beta_2=1$$

〈**证明**〉 设K的所有有向2单形$s_1,s_2,\cdots,s_r$有相同方向。任意取K的2闭链z，设

$$z=a_1s_1+a_2s_2+\cdots+a_rs_r,\ (a_1,a_2,\cdots,a_r\in Z)$$

因z是闭链，故

$$0=\partial z=a_1\partial s_1+a_2\partial s_2+\cdots+a_r\partial s_r$$

对于K的任意顶点P，注意以P为中心的星形是由相邻的有向单形之列而成，而且$s_1,s_2,\cdots,s_r$有相同方向，从上列等式可见$a_1=a_2=\cdots=a_r$，故得下式（参照例32.5）。

$$z=a(s_1+s_2+\cdots+s_r),\quad (a\in Z)$$

$$\therefore\quad H_2(K,Z)=Z_2(K,Z)=\{a(s_1+s_2+\cdots+s_r)\,|\,a\in Z\}\approx Z$$

$$\therefore\quad \beta_2=1$$

（证毕）

在以上证明里出现的2闭链$z=s_1+s_2+\cdots+s_r$叫做有向二维多面体流形K的**基本2闭链**。

定理 6.6 如果二维多面体流形K不具有方向，则下式成立。

$$H_2(K,Z)=\{0\},\quad \beta_2=0$$

〈证明〉 与例 32.6 一样，可证明此定理，但略其证明。

到目前为止，在本节中所述定理、定义以及其他事项，一般地说，对n维流形M及其单纯剖分(M,K,h)也成立。而且对n维多面体流形也成立。

§34 微分形式的积分

在直线R^1上取两点P_0,P_1，设其坐标分别为x_0,x_1，当$x_1-x_0>0$时，就说有向1单形(P_0,P_1)的方向与坐标系x的方向一致。其次，在平面R^2上，取三点P_0,P_1,P_2，设向量$\overrightarrow{P_0P_1}$，$\overrightarrow{P_0P_2}$的分量分别为(p^1,p^2)，(q^1,q^2)。当

$$\begin{vmatrix} p^1 & q^1 \\ p^2 & q^2 \end{vmatrix}>0$$

时，就说有向2单形$s=(P_0,P_1,P_2)$的方向与R^2的坐标系(x^1,x^2)的方向一致。再在R^3里取四点P_0,P_1,P_2,P_3，设向量$\overrightarrow{P_0P_1}$，$\overrightarrow{P_0P_2}$，$\overrightarrow{P_0P_3}$的分量分别为(p^1,p^2,p^3)，(q^1,q^2,q^3)，(r^1,r^2,r^3)，如果

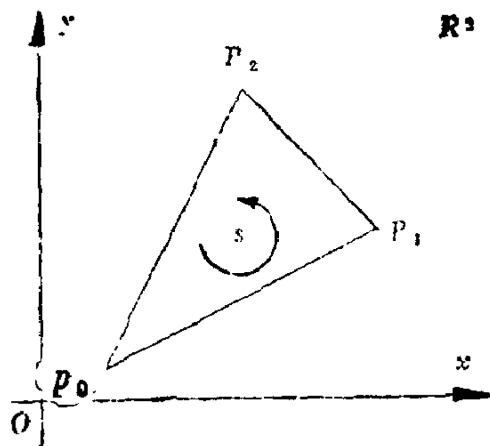


图 618

$$\begin{vmatrix} p^1 & q^1 & r^1 \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p^3 & q^3 & r^3 \end{vmatrix}>0$$

那末就说有向3单形$s=(P_0,P_1,P_2,P_3)$的方向与R^3的坐标系(x^1,x^2,x^3)的方向一致。以下同理定义R^n里的有向n单形$(P_0,P_1,\cdots,P_n)$的方向与R^n的坐标系$(x^1,\cdots,x^n)$的方向间的关系。

在 R^n 里取与其坐标系的方向一致的有向 n 单形 s。又在 R^n 内任意取 n 次微分形式 θ，设

$$\theta = f(x^1, \cdots x^n) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

θ 在 s 上的**积分**以下列 n 重积分

$$\int_s \theta = \int \cdots \int_{[\bar{s}]} f(x^1, \cdots, x^n) dx^1 \cdots dx^n \qquad (34.1)$$

来定义，以左边的符号表示。式中$[\bar{s}]$表示单形$[s]$的闭包。

设给定了 n 维流形M及其单纯剖分 (M, K, h)，M的各单形 $[\sigma] = h([s])$ $(s \in K)$包含于一个坐标邻域之内。这时，在M上取有向 p 单形 $\sigma = (P_0, \cdots, P_p)$，设 $h(Q_0) = P_0, \cdots, h(Q_p) = P_p$，又设 R^p 上的有向单形 $s = (Q_0, \cdots, Q_p)$ 的方向与 R^p 的坐标系$(x^1, \cdots, x^p)$ 的方向一致。再设在 M 上给定了 p 次微分形式 ω，

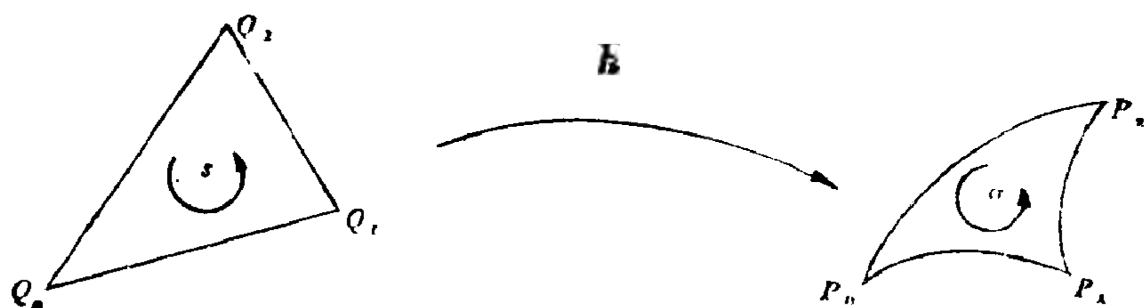


图 6.19

这时，ω 在 σ 上的**积分**以

$$\int_\sigma \omega = \int_s h_* \omega \qquad (34.2)$$

来定义，以左边的符号表示（对于符号 h_* 的含义参照§28）。其次定义 ω 在$-\sigma$上的积分为

$$\int_{-\sigma} \omega = -\int_\sigma \omega \qquad (34.3)$$

设$[\sigma]$包括在M的坐标邻域O里，O里的坐标系为$(u^1, \cdots, u^n)$，映射 $h: [K] \to M$ 的局部表示为 $u^h = u^h(x^1, \cdots, x^p)$，$(h = 1, \cdots, n)$。如设 ω 在坐标邻域O里的局部表示为

$$\omega=\sum_{h<i<\cdots<j}\omega_{hi\ldots j}du^h\wedge du^i\wedge\cdots\wedge du^j$$

则
$$\int_\sigma\omega=\int\cdots\int_{[\bar{s}]}\omega_{hi\ldots j}\frac{\partial(u^h,u^i,\cdots,u^j)}{\partial(x^1,x^2,\cdots,x^p)}dx^1dx^2\cdots dx^p$$

但式中 $\omega_{hi\ldots j}=\omega_{hi\ldots j}(u^1(x^1,\cdots,x^p),\cdots,u^n(x^1,\cdots,x^p))$

上式中积分之值与O内坐标系$(u^1,\cdots,u^n)$的选法无关。

任意取流形M上的实系数p链$c(\in C_p(M,R))$，设

$$c=a_1\sigma_1+\cdots+a_r\sigma_r,(a_1,\cdots,a_r\in R)$$

但$\sigma_1,\cdots,\sigma_r$表示M的有向p单形的全体。这时，定义ω在链c上的**积分**为

$$\int_c\omega=a_1\int_{\sigma_1}\omega+\cdots+a_r\int_{\sigma_r}\omega \tag{34.4}$$

用左边的符号来表示它。

斯托克斯（Stokes）定理 在R^3里考虑有向3单形$s_0=(O,P_1,P_2,P_3)$，如图6.20所示.又在R^3里取二次微分形式θ，设θ具有特殊的形状如

$$\theta=f(x^1,x^2,x^3)dx^2\wedge dx^3$$

这时，

$$d\theta=\frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$$

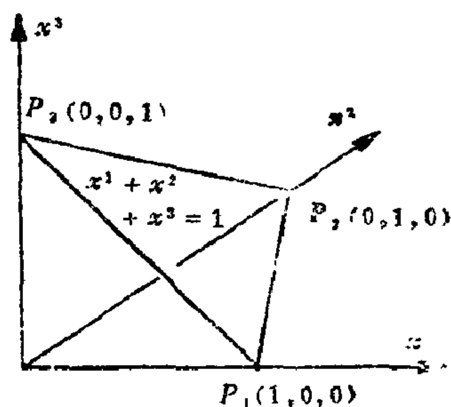


图 6.20

$$\therefore\int_{s_0}d\theta=\iiint_{[\bar{s}]}\frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1dx^2dx^3$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x^3}\int_0^{1-x^2-x^3}\frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1dx^2dx^3$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x^3}[f(1-x^2-x^3,x^2,x^3)-f(0,x^2,x^3)]dx^2dx^3$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x^3}f(1-x^2-x^3,x^2,x^3)dx^2dx^3$$

$$-\int_0^1\int_0^{1-x^3}f(0,x^2,x^3)dx^2dx^3$$

因为

$$\partial s_0 = (P_1, P_2, P_3) - (O, P_2, P_3) + (O, P_1, P_3) - (O, P_1, P_2)$$

所以从 θ 的形状可知

$$\int_{(P_1,P_2,P_3)} \theta = \int_0^1 \int_0^{1-x^3} f(1-x^2-x^3, x^2, x^3) dx^2 dx^3$$

$$\int_{(O,P_2,P_3)} \theta = \int_0^1 \int_0^{1-x^3} f(0, x^2, x^3) dx^2 dx^3, \text{则}$$

$$\int_{(O,P_1,P_2)} \theta = 0, \qquad \int_{(O,P_1,P_3)} \theta = 0$$

成立。故得下式：设 $\theta = f dx^2 \wedge dx^3$，则

$$\int_{s_0} d\theta = \int_{\partial s_0} \theta \qquad (34.5)$$

然而，$\boldsymbol{R}^3$ 里的任意二次微分形式可以写做

$$\theta = f dx^2 \wedge dx^3 + g dx^1 \wedge dx^3 + h dx^1 \wedge dx^2$$

因为(34.5) 对于 $g dx^1 \wedge dx^3$ 与 $h dx^1 \wedge dx^2$ 也成立，所以(34.5)对于 $\boldsymbol{R}^3$ 里的任何二次微分形式 θ 成立。

以上所论说明，当 s_0 是有特殊形状的有向单形时(34.5)成立。如果选与 $\boldsymbol{R}^3$ 的坐标系(x^1, x^2, x^3) 同向的任意有向 3 单形 $s = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$，则存在 $\boldsymbol{R}^3$ 内的仿射变换 φ：$\boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$，即

$$'x^h = a_i{}^h x^i + b^h \qquad |a_i{}^h| > 0$$

可使在此 φ 下 $Q_0 \mapsto O$，$Q_1 \mapsto P_1$，$Q_2 \mapsto P_2$，$Q_3 \mapsto P_3$。这时，在 φ 下，有向单形 s 变为 s_0，∂s 变为 ∂s_0。对于任意二次微分形式 θ，由(34.5)可得

$$\int_{s_0} d(\varphi_* \theta) = \int_{\partial s_0} \varphi_* \theta$$

$$\therefore \quad \int_{s_0} \varphi_* (d\theta) = \int_{\partial s_0} \varphi_* \theta$$

（参照(28.10)）。因此

$$\int_s d\theta = \int_{\partial s} \theta \qquad (34.6)$$

成立。

其次，如果取 n 维流形M的任意 3 链 $c(\in C_3(M, R))$，运用(34.6)可见，对于任意二次微分形式 ω

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega \tag{34.7}$$

成立。

再次，从格林定理 5.15 可见，对于与 R^2 的坐标系同向的任意 2 单形 s 以及 R^2 上的任意一次微分形式 θ，(34.6) 成立。故对于 n 维流形M的任意 2 链 $c(\in C_2(M,R))$以及任意一次微分形式 ω(34.7)也成立。

此外，对于M上的 C^∞ 函数即 0 次微分形式 f 以及M的 0 链 $c(\in C_0(M,R))$，设 $c=a_1P_1+\cdots+a_rP_r$，定义 f 在 c 上的**积分**为

$$\int_c f = a_1f(P_1)+\cdots+a_rf(P_r)$$

这时，显然，对于M的任意 1 链 $c(\in C_1(M,R))$，

$$\int_c df = \int_{\partial c} f$$

成立。即在这样情况下(34.7)也成立。推广上述事实，下列斯托克斯定理成立。

定理 6.7（斯托克斯） 对于 n 维流形M的任意 p 链 $c(\in C_p(M, R))$ 与任意 $(p-1)$ 次微分形式 ω，

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$$

成立。

〈证明〉 一般情况的证明略。但一般情况的证明方法与 $n=3$，$p=2$ 以及 $n=2$，$p=1$ 的情况下的证明方法大致相同。

例 34.1 在欧氏空间 E^3 内给定向量场X，在直角坐标系(x,y,z)下设其分量为(X_x,X_y,X_z)。

(1) 对于一次微分形式

$$\omega = X_x dx + X_y dy + X_z dz$$

与图 6.21 中的2 链 c，适用斯托克斯定理得

$$\int_c \left[\left(\frac{\partial X_z}{\partial y} - \frac{\partial X_y}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial X_x}{\partial z} - \frac{\partial X_z}{\partial x}\right)dxdz\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial X_y}{\partial x} - \frac{\partial X_x}{\partial y}\right)dxdy\right] = \int_{\partial c}(X_x dx + X_y dy + X_z dz)$$

即得向量分析里的**斯托克斯定理**：

$$\int_c (\mathrm{rot}\boldsymbol{X})\cdot \boldsymbol{N} dA = \int_{\partial c} \boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{x}$$

式中 dA 与 $\boldsymbol{N}$ 分别是 2 链 c 形成的曲面的面素与单位法向量。

(2) 其次考虑二次微分形式

$$\theta = X_x dy \wedge dz - X_y dx \wedge dz + X_z dx \wedge dy$$

如图 6.22 所示，将立体的内部看做一个有向 3 单形 σ，运用斯托克斯定理则得

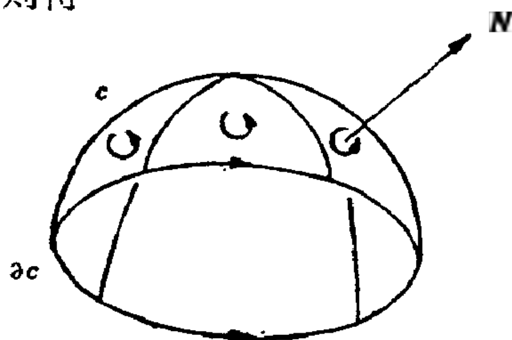


图 6.21

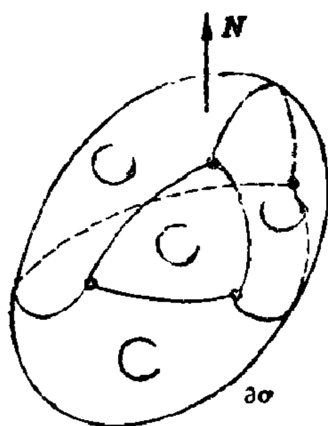


图 6.22

$$\int_\sigma \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{dz}\right)dxdydz$$

$$= \int_{\partial\sigma} [X_x dydz + X_y dxdz + X_z dxdy]$$

即得向量分析里的**高斯散度定理**：

$$\int_\sigma (\mathrm{div}\boldsymbol{X})dv = \int_{\partial\sigma} \boldsymbol{X}\cdot \boldsymbol{N} dA$$

式中 $dv = dxdydz, dA$ 与 $\boldsymbol{N}$ 分别是 $\partial\sigma$ 的面积素与单位法向量。

§35 高斯·崩尼定理（大范围的）

运用高斯·崩尼定理 5.18 来证明以下定理。它叫做（**大范围的）高斯·崩尼定理**。

定理 6.8 （高斯·崩尼） 设二维黎曼空间（M,g）有向而且紧致，则下式成立。

$$\int_M K d\sigma = 2\pi \chi(M)$$

式中K为(M,g)的曲率，$\chi(M)$ 为M的欧拉示性数。

《注意》 应该注意的是上列等式的左边是微分几何学的量，而右边是M的拓扑学的量。

〈证明〉 如取M的三角剖分（M,L,h），L为有向二维多面体的流形。设L的基本 2 闭链为

$$\widetilde{c} = s_1 + s_2 + \cdots + s_r$$

式中 r 为L的 2 单形的个数。而且取有向单形 $\sigma_1 = h(s_1),\cdots,\ \sigma_r = h(s_r)$ 的方向与M的方向一致。这时

$$c = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_r \qquad (35.1)$$

为M上的基本 2 闭链。适用高斯·崩尼定理 (5.18) 于 σ_α ($\alpha = 1,\cdots,\ r$)上，得

$$\int_{\partial\sigma_\alpha} \kappa ds + \iint_{\sigma_\alpha} K d\sigma = 2\pi - (\pi - A_{\alpha 1}) - (\pi - A_{\alpha 2}) - (\pi - A_{\alpha 3})$$

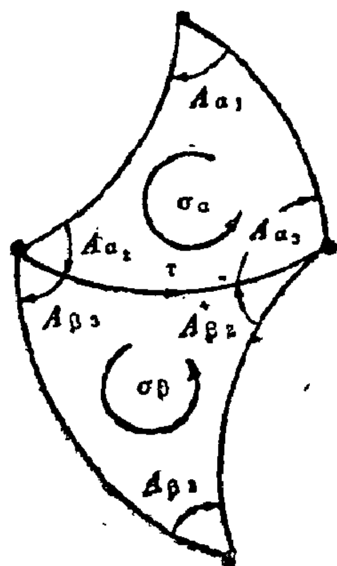


图 6.23

式中 A_{α_1}，A_{α_2}，A_{α_3} 表示σ_α 的三个内角（参照图 6.23)。将上式关于 $\alpha = 1,\cdots,r$ 边边相加得

$$\sum_\alpha \int_{\partial\sigma_\alpha} \kappa ds + \sum_\alpha \int_{\sigma_\alpha} K d\sigma$$

$$= 2\pi r - \sum_\alpha [(\pi - A_{\alpha_1}) + (\pi - A_{\alpha_2}) + (\pi - A_{\alpha_3})] \qquad (35.2)$$

设 σ_α 与 σ_β 相邻，公有有向 1 单形 τ. 这时，在如图6.23的情况下，

$$\int_{\partial\sigma_\alpha}\kappa ds = \int_\tau \kappa ds + \cdots$$

$$\int_{\partial\sigma_\beta}\kappa ds = -\int_\tau \kappa ds + \cdots$$

故
$$\sum_\alpha \int_{\partial\sigma_\alpha}\kappa ds = 0 \tag{35.3}$$

其次，对于 σ_α 的各内角，以其对边、有向1单形对应之（在 σ_α 里，τ 对应于 A_{α_1}），在图6.23里，一个有向单形 τ 与 σ_α 的内角 A_{α_1} 与 σ_β 的内角 A_{β_1} 对应。故在（35.2）右边第二项

$$\sum_\alpha [(\pi - A_{\alpha_1}) + (\pi - A_{\alpha_2}) + (\pi - A_{\alpha_3})]$$

里 $(\pi - A_{\alpha_i})$ 的个数为 L 里单形的个数 q 的两倍 $2q$。因此

$$\sum_\alpha [(\pi - A_{\alpha_1}) + (\pi - A_{\alpha_2}) + (\pi - A_{\alpha_3})]$$

$$= 2\pi q - \sum_\alpha (A_{\alpha_1} + A_{\alpha_2} + A_{\alpha_3}) \tag{35.4}$$

又设 L 里0单形的个数为 p，显然

$$\sum_\alpha (A_{\alpha_1} + A_{\alpha_2} + A_{\alpha_3}) = 2\pi p \tag{35.5}$$

于是，将(35.3)，(35.4)，(35.5)代入(35.2)可得

$$\sum_\alpha \int_{\sigma_\alpha} K d\sigma = 2\pi(p - q + r) = 2\pi\chi(K) = 2\pi\chi(M)$$

然而左边显然是

$$\int_M K d\sigma = \sum_\alpha \int_{\sigma_\alpha} K d\sigma$$

故定理6.8得证。（证毕）

§36 单位正交标架

考虑二维黎曼空间(M,g)。设在(M,g)里的开域D中给定了单位正交标架$(P; e_1, e_2)$（参照§21）。这时，在D里唯一地存在两个一次微分形式 ω_1, ω_2，并满足

$$\omega_j(e_i) = \delta_{ji}, \quad (i, j = 1, 2) \tag{36.1}$$

再设在坐标邻域O内，ω_1,ω_2的局部表示分别为

$$\omega_1 = b_{1i}dx^i,\quad \omega_2 = b_{2i}dx^i$$

运用(36.1)与$(e_j,e_i)=\delta_{ji}$得

$$g_{ji} = b_{1j}b_{1i} + b_{2j}b_{2i}$$

即线素$ds^2 = g_{ji}dx^j dx^i$在坐标邻域O里可表示为

$$ds^2 = (\omega_1)^2 + (\omega_2)^2 \tag{36.2}$$

因为e_1与e_2形成单位正交基，故$\nabla_{e_j}e_1$与e_1垂直，$\nabla_{e_j}e_2$与e_2垂直。故可令

$$\nabla_{e_j}e_1 = -\varphi(e_j)e_2,\quad \nabla_{e_j}e_2 = \varphi(e_j)e_1 \tag{36.3}$$

式中φ为定义在D里的一次微分形式，叫做黎曼空间(M,g)的（在D的）**联络微分形式**（参照§21）。运用(36.2)与(36.3)（参照习题四之 3(p.150)）得

$$\begin{aligned}(d\omega_1)(e_1,e_2) &= e_1\omega_1(e_2) - e_2\omega_1(e_1) - \omega_1([e_1,e_2])\\ &= 0 - 0 - \omega_1(\nabla_{e_1}e_2 - \nabla_{e_2}e_1)\\ &= -\omega_1(\varphi(e_1)e_1 - \varphi(e_2)e_2)\\ &= -\varphi(e_1)\omega_1(e_1) = -\varphi(e_1)\end{aligned}$$

$$-(\varphi\wedge\omega_2)(e_1,e_2) = -[\varphi(e_1)\omega_2(e_2) - \varphi(e_2)\omega_2(e_1)] = -\varphi(e_1)$$

$$\therefore\quad d\omega_1 + \varphi\wedge\omega_2 = 0$$

同理
$$d\omega_2 - \varphi\wedge\omega_1 = 0$$

整理在一起得下式：

$$\begin{aligned}d\omega_1 + \varphi\wedge\omega_2 &= 0\\ d\omega_2 - \varphi\wedge\omega_1 &= 0\end{aligned} \tag{36.4}$$

此式叫做黎曼空间(M,g)的**基本方程**。再运用(36.3)，可作下列演算

$$\begin{aligned}R(e_1,e_2)e_1 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_1 - \nabla_{[e_1,e_2]}e_1\\ &= \nabla_{e_1}\{-\varphi(e_2)e_1\} - \nabla_{e_2}\{-\varphi(e_1)e_1\} + \varphi([e_1,e_2])e_1\\ &= -[e_1\{\varphi(e_2)\} - e_2\{\varphi(e_1)\} - \varphi([e_1,e_2])]e_1\\ &= -[d\varphi(e_1,e_2)]e_1\end{aligned}$$

然而根据(23.19)可见，(M,g)的曲率K由下式决定。

$$K = -(R(e_1,e_2)e_1,e_2)$$

$$\therefore \quad K = d\varphi(e_1, e_2)$$

$$\therefore \quad d\varphi = K\omega_1 \wedge \omega_2 \qquad (36.5)$$

上面出现的 $d\varphi$ 叫做(M,g)的**曲率微分形式**．整理上述事实，得到如下定理。

定理 6.9 在二维黎曼空间 (M,g) 的开域D里给定单位正交标架$(P;e_1,e_2)$时，下式成立。

$$ds^2 = (\omega_1)^2 + (\omega_2)^2$$

$$d\omega_1 + \varphi \wedge \omega_2 = 0, \quad d\omega_2 - \varphi \wedge \omega_1 = 0$$

$$d\varphi = K\omega_1 \wedge \omega_2$$

式中K为(M,g)的曲率。

最后证明下列定理。

定理 6.10 设(M,g)是紧致、有向的二维黎曼空间．如在(M,g)上存在到处不为 0 的向量场X，则

$$\chi(M) = 0$$

〈**证明**〉 因为X到处不为 0，所以令 $e_1 = X/\|X\|$ 时，则 e_1 是M上长为 1 的向量场．适当地取长为 1 的向量场 e_2 可使e_1与e_2形成单位正交系又与M的方向一致，故可在M整体上作出单位正交标架$(P; e_1,e_2)$。运用定理 6.9（规定 e_1 与 e_2 的方向使得M的体积素为$d\sigma = \omega_1 \wedge \omega_2$ 参照定理 4.9）可见

$$d\varphi = K\omega_1 \wedge \omega_2 = Kd\sigma$$

在M整体上成立。然而根据斯托克斯定理

$$\int_M d\varphi = \int_{\partial M} \varphi = 0 \qquad (\because\ \partial M = \varnothing)$$

再运用高斯·崩尼定理 6.8 得

$$0 = \int_M d\varphi = \int_M Kd\sigma = 2\pi\chi(M)$$

$$\therefore \quad \chi(M) = 0 \qquad \text{（证毕）}$$

故在有向二维流形M上存在到处不为 0 的向量场X时，则M与环面同胚。反之，在环面上存在到处不为 0 的向量场。

§37　上同调

n 维流形M上的p次微分形式的全体所作的集以 $C^p(M)$ 表示，则外微分算子 d 是有下列性质的映射。

$$\{0\}\xleftarrow{d}C^n(M)\xleftarrow{d}C^{n-1}(M)\xleftarrow{d}\cdots$$
$$\xleftarrow{d}C^2(M)\xleftarrow{d}C^1(M)\xleftarrow{d}C^0(M)$$

而且 $d^2=0$，故

$$\{0\}\xleftarrow{d}dC^p(M)\xleftarrow{d}C^p(M)$$

成立。令

$$\begin{aligned}Z^p(M)&=\{\omega\in C^p(M)\,|\,d\omega=0\}\\ B^p(M)&=\{d\omega\,|\,\omega\in C^{p-1}(M)\}\end{aligned}\qquad (p>0)$$

特别是定义

$$B^0(M)=\{0\}$$

这时，特别是 $C^n(M)=Z^n(M)\quad(n=\dim M)$。

$C^p(M)$ 可以看做实向量空间。这时，$Z^p(M)$ 是 $C^p(M)$ 的子空间，$B^p(M)$ 是 $Z^p(M)$的子空间. $Z^p(M)$ 的元叫做 **p 次闭微分形式**，$B^p(M)$ 的元叫做 **p 次恰当微分形式**. 商向量空间

$$H^p(M)=Z^p(M)/B^p(M),\quad (0\leqslant p\leqslant n)$$

叫做流形M的 **p 次上同调群**.

例 37.1 试证下列事实.

（1）如果M是连通的，则 $\dim H^0(M)=1$

（2）如果M为实直线R，则

$$\dim H^0(M)=1,\quad \dim H^1(M)=0$$

〈解答〉（1）如果取 $f\in Z^0(M)$，则 f 为 C^∞ 函数，而且 $df=0$。因M是连通的，故 f 一定。从而 $\dim Z^0(M)=1$。然因 $\dim B^0(M)=\dim\{0\}=0$，故

$$\dim H^0(M)=\dim Z^0(M)-\dim B^0(M)=1-0=1$$

(2) 首先根据 (1) 知 $\dim H^0(M)=1$.

其次任意取一次微分形式 $\omega=u(x)dx$. 令

$$f=\int u(x)dx$$

则
$$\omega=df\in B^1(M)$$

故 $C^1(M)=B^1(M)$. 然而 $C^1(M)\supset Z^1(M)\supset B^1(M)$. 故 $Z^1(M)=B^1(M)$. 所以

$$\dim H^1(M)=\dim Z^1(M)-\dim B^1(M)=0 \qquad \text{(证毕)}$$

设M与N为流形, $\varphi:M\to N$ 为 C^∞ 映射, 则决定线性映射

$$\varphi_*:C^p(N)\to C^p(M)$$

如于 § 28 所述. 又由(28.13)知

$$d\circ\varphi_*=\varphi_*\circ d$$

成立. 故 φ_* 在 $Z^p(M)$ 与 $B^p(M)$ 上的限制分别为

$$\varphi_*:Z^p(N)\to Z^p(M),\quad \varphi_*:B^p(N)\to B^p(M)$$

于是可按自然方法定义线性映射

$$\varphi_*:H^p(N)\to H^p(M)$$

特别设 $\varphi:M\to N$ 为流形的微分同胚映射时, 则

$$\varphi:M\to N,\quad \varphi^{-1}:N\to M$$

都是 C^∞ 映射,

$$\varphi_*\circ(\varphi^{-1})_*:C^p(M)\to C^p(M),\quad (\varphi^{-1})_*\circ\varphi_*:C^p(N)\to C^p(N)$$

是恒等映射. 即

$$\varphi_*:C^p(N)\to C^p(M)$$

是从 $C^p(N)$到 $C^p(M)$ 上的同构映射. 故

$$\varphi_*:H^p(N)\to H^p(M)$$

也是从 $H^p(N)$ 到 $H^p(M)$ 上的同构映射. 总结以上事实, 可得下列定理.

定理 6.11 如果两个流形M与N微分同胚, 那末

$$H^p(M)\approx H^p(N)$$

(即 $H^p(M)$ 是M的拓扑不变性质).

对于 $\omega_1,\omega_2\in Z^p(M)$，设 $\omega_1-\omega_2\in B^p(M)$。即存在 $(p-1)$ 次微分形式 π 满足

$$\omega_1-\omega_2=d\pi$$

这时，就说 ω_1 与 ω_2 **上同调**，这个事实用 $\omega_1\sim\omega_2$ 表示。特别是 ω_1 是恰当微分形式时，即存在 $(p-1)$ 次微分形式 π 满足

$$\omega_1=d\pi$$

时，就说 ω_1 **上同调于** 0，这个事实用 $\omega_1\sim 0$ 表示。即 $H^p(M)$ 是将 $Z^p(M)$ 用等价关系～分类而得的等价类全体所作向量空间。

§38 同调 上同调

设 n 维流形 M 紧致，(M,K,h) 为 M 的三角剖分。固定 (M,K,h) 来考虑。取闭链 $z_1,z_2\in Z_p(M,R)$，设 $z_1\sim z_2$。又取闭形式 $\omega_1,\omega_2\in Z^p(M)$，设 $\omega_1\sim\omega_2$。即设

$z_1-z_2=\partial c$，$(c\in C_{p+1}(M,R))$；$\omega_1-\omega_2=d\pi$，$(\pi\in C^{p-1}(M))$

成立。运用斯托克斯定理并注意 $d\omega_1=0$ 与 $\partial z_1=0$ 则得

$$\int_{z_1-z_2}\omega_1=\int_{\partial c}\omega_1=\int_c d\omega_1=0,\ \int_{z_1}(\omega_1-\omega_2)=\int_{z_1}d\pi=\int_{\partial z_1}\pi=0$$

$$\therefore\qquad \int_{z_1}\omega_1=\int_{z_2}\omega_1=\int_{z_1}\omega_2$$

同理

$$\int_{z_1}\omega_2=\int_{z_2}\omega_2$$

因此

$$\int_{z_1}\omega_1=\int_{z_2}\omega_1=\int_{z_1}\omega_2=\int_{z_2}\omega_2\qquad(38.1)$$

包含 $z\in Z_p(M,R)$ 的同调类用 $[z]\in H_p(M,R)$ 表示，包含 $\omega\in Z^p(M)$ 的上同调类用 $[\omega]\in H^p(M)$ 表示，则由(38.1)可见下列事实：若定义

$$\langle\langle[z],[\omega]\rangle\rangle=\int_z\omega\in R\qquad(38.2)$$

则右边的积分值与 $[z]$ 的代表元 z 和 $[\omega]$ 的代表元 ω 的选法无关，由其两类 $[z]$，$[\omega]$ 而定。此 $\langle\langle[z],[\omega]\rangle\rangle$ 叫做 $[z]\in H_p(M,R)$ 与 $[\omega]\in$

$H^p(M)$ 的**内积**。在这里，固定〔ω〕而变动〔z〕，则《 ,〔ω〕》决定实向量空间 $H_p(M,R)$ 上的线性函数。即 $H^p(M)$ 的各元〔ω〕定义 $H_p(M,R)$ 上的线性函数。故对应〔ω〕$\mapsto$《 ,〔ω〕》决定从 $H^p(M)$ 到 $H_p(M,R)$ 的对偶空间 $H_p(M,R)^*$ 中的线性映射

$$i_p: H^p(M) \to H_p(M,R)^* \qquad (38.3)$$

就此，下列定理成立。

定理 6.12 (de Rham) 紧致流形M的p次上同调群 $H^p(M)$ 可与p维同调群 $H_p(M,R)$ 的对偶空间 $H_p(M,R)^*$ 等同。(即(38.3)的 i_p: $H^p(M)\to H_p(M,R)^*$ 是从 $H^p(M)$到 $H_p(M,R)^*$ 上的同构映射)。

〈**证明**〉 从略。

从定理 6.12 可知以下事实。

$$\dim H^p(M) = \dim H_p(M,R) = \beta_p \qquad (38.4)$$

式中 β_p 是M的p维贝蒂数。

定理 6.13 紧致流形M上的p次闭微分形式为恰当微分形式的充要条件是：在M上的任意p闭链c上 ω 的积分为 0 。

〈**证明**〉 首先设 ω 为恰当微分形式。即设 $\omega = d\pi$ 。故对于任意p闭链 c，

$$\int_c \omega = \int_c d\pi = \int_{\partial c}\pi = 0 \quad (\because\ \partial c = 0)$$

反之，任意取p闭链 c，若设

$$\int_c \omega = 0$$

则《〔c〕,〔ω〕》= 0。因为c是任意取的，故由定理 6.12 得〔ω〕= 0。即 $\omega = d\pi \quad (\pi \in C^{p-1}(M))$。 (证毕)

§39 调和形式

设二维黎曼空间(M,g)有向.并设在M的坐标邻域O里给定单位正交标架$(P;e_1,e_2)$,对于由(36.1)决定的一次微分形式 ω_1 与 ω_2,又设

$\omega_1\wedge\omega_2$与(M,g)的体积素$d\sigma=\sqrt{g}\,dx^1\wedge dx^2$一致（参照定理 4.9）。任意取$M$上的一次微分形式$\theta,\varphi$，设$\theta$与$\varphi$在$O$里的局部表示分别为

$$\theta=\tilde{\theta}_i dx^i=\theta_1\omega_1+\theta_2\omega_2,$$

$$\varphi=\tilde{\varphi}_i dx^i=\varphi_1\omega_1+\varphi_2\omega_2$$

这时，C^∞ 函数

$$(\theta,\varphi)=g^{ji}\tilde{\theta}_j\tilde{\varphi}_i=\theta_1\varphi_1+\theta_2\varphi_2$$

叫做θ与φ的**内积**。

对偶形式 对于一次微分形式θ，定义一次微分形式$*\theta$使得

$$\varphi\wedge(*\theta)=(\varphi,\theta)\omega_1\wedge\omega_2 \qquad (39.1)$$

对于所有的一次微分形式φ成立，$*\theta$叫做θ的**对偶形式**。此$*\theta$具有以下局部表示。

$$\begin{aligned}*\theta&=-\theta_2\omega_1+\theta_1\omega_2\\&=-(\sqrt{g}\,\varepsilon_{ji}\,g^{ip}\,\tilde{\theta}_p)dx^j,\quad g=\det(g_{ji})\end{aligned} \qquad (39.2)$$

式中运用了下述事实。即

$$\sqrt{g}\,\varepsilon_{11}=\sqrt{g}\,\varepsilon_{22}=0,\quad \sqrt{g}\,\varepsilon_{12}=-\sqrt{g}\,\varepsilon_{21}=\sqrt{g} \qquad (39.3)$$

$$\omega_1\wedge\omega_2=\sum_{j<i}\sqrt{g}\,\varepsilon_{ji}dx^j\wedge dx^i=\sqrt{g}\,dx^1\wedge dx^2 \qquad (39.4)$$

成立。又因(M,g)有向，故$\sqrt{g}\,\varepsilon_{ji}$是定义在整个$M$上的(0,2)阶反称张量场的分量，而且（参照例 22.2）

$$\nabla_k(\sqrt{g}\,\varepsilon_{ji})=0 \qquad (39.5)$$

再由(39.2)显然可见

$$*(*\theta)=-\theta \qquad (39.6)$$

成立。

【问题 39.1】试证上述(39.2)。

总结上述事实得下列定律：设f为任意C^∞函数，θ与φ是任意一次形式，则

$$\left.\begin{aligned}&*(f\theta)=f(*\theta),\ *(\theta+\varphi)=*\theta+*\varphi\\&*(*\theta)=-\theta,\quad \theta\wedge(*\varphi)=\varphi\wedge(*\theta)\end{aligned}\right\} \qquad (39.7)$$

对于M上的C^∞函数f，定义二次微分形式$*f$为

$$*f = f\omega_1 \wedge \omega_2$$

$$= \sqrt{g}\, f dx^1 \wedge dx^2 = \frac{1}{2} f \sqrt{g}\, \varepsilon_{ji} dx^j \wedge dx^i \qquad (39.8)$$

$*f$ 叫做 f 的**对偶形式**。

再设 $\pi = f\omega_1 \wedge \omega_2$ 是 M 上的任意二次微分形式，对此形式定义 C^∞ 函数 $*\pi$ 为

$$*\pi = f \qquad (39.9)$$

$*\pi$ 叫做 π 的**对偶形式**。令

$$\pi = \frac{1}{2} \pi_{ji} dx^j \wedge dx^i$$

则

$$*\pi = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ji} \pi_{ji} = \frac{1}{\sqrt{g}} \pi_{12} \qquad (39.10)$$

其中运用了下述事实。即

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{11} = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{22} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{12} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{21} = \frac{1}{\sqrt{g}}$$

而且 $(1/\sqrt{g})\varepsilon^{ji}$ 是定义在整个M上的 (2,0)阶反称张量场的分量，此外尚有（参照例 22.2）

$$\nabla_k \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ji} \right) = 0 \qquad (39.11)$$

总结上述事实，得下列定律：设 f 与 g 为任意的 C^∞ 函数，π 与 ω 是任意二次微分形式，则

$$\begin{aligned} &*(f+g) = *f + *g \qquad *(\pi+\omega) = *\pi + *\omega \\ &*(*f) = f \qquad\qquad\quad *(*\omega) = \omega \end{aligned} \qquad (39.12)$$

再将上述事实整理一下，可见算子 $*$ 是如下映射．

$$*: C^0(M) \to C^2(M), \quad *: C^1(M) \to C^1(M), \quad *: C^2(M) \to C^0(M)$$

余微分 (codifferential) 在有向二维黎曼空间 (M,g) 上，所谓**余微分算子**就是映射

$$\delta: C^2(M) \to C^1(M), \quad \delta: C^1(M) \to C^0(M), \quad \delta: C^0(M) \to \{0\}$$

分别定义如下。

对于二次微分形式 ω，

$$\delta\omega = -*d*\omega \tag{39.13}$$

对于一次微分形式 θ，

$$\delta\theta = -*d*\theta \tag{39.14}$$

对于 C^∞ 函数 f，

$$\delta f = 0 \tag{39.15}$$

运用(39.6)与(39.12)可见，(39.13)，(39.14)，(39.15)分别与

$$*\delta\omega = d*\omega,\quad *\delta\theta = -d*\theta,\quad *\delta f = d*f(=0) \tag{39.16}$$

等价。以下证明下列公式。

公式 $$\delta^2 = 0 \tag{39.17}$$

〈**证明**〉 对于 C^∞ 函数 f，

$$\delta^2 f = \delta(\delta f) = \delta(0) = 0$$

对于一次微分形式 θ，

$$\delta^2\theta = \delta(\delta\theta) = 0 \quad (\because\ \delta\theta \in C^0(M))$$

对于二次微分形式 ω，

$$\delta^2\omega = \delta(\delta\omega) = -*d*(-*d*\omega) = *d**d*\omega$$

$$= -*d^2*\omega = 0 \quad (\because\ d^2 = 0,\ **\theta = -\theta)$$ （证毕）

拉氏算子 在有向二维黎曼空间 (M,g) 里，算子

$$\Delta:\ C^p(M) \to C^p(M) \quad (p = 0,1,2)$$

的定义是

$$\Delta = d\delta + \delta d \tag{39.18}$$

它叫做**拉氏算子**。

例 39.1 设 C^∞ 函数 f，一次微分形式 θ，二次微分形式 π 的局部表示分别是

$$f,\quad \theta = \theta_i dx^i,\quad \pi = \frac{1}{2}\pi_{ji} dx^j \wedge dx^i$$

试证下列事实。

(1) $\delta\theta$ 的局部表示为 $\delta\theta = -g^{ji}\nabla_j\theta_i$

(2) $\delta\pi$ 的局部表示为 $\delta\pi=-(g^{qp}\nabla_q\pi_{pi})dx^i$

(3) Δf 的局部表示为 $\Delta f=-g^{ji}\nabla_j\nabla_i f$

(4) $\Delta\theta$ 的局部表示为 $\Delta\theta=-(g^{qp}\nabla_q\nabla_p\theta_i-R_i{}^p\theta_p)dx^i$

式中设利齐张量 Ric 的分量为 R_{ji}，$R_j{}^h=R_{ip}g^{ph}$。

〈**解答**〉 (1) 运用(39.5)与(39.11)。

$$*\theta=-(\sqrt{g}\,\varepsilon_{ji}g^{ip}\theta_p)dx^j$$

$$\therefore\quad d*\theta=-\frac{1}{2}(\sqrt{g}\,\varepsilon_{ji}g^{ip}\nabla_k\theta_p-\sqrt{g}\,\varepsilon_{ki}g^{ip}\nabla_j\theta_p)dx^k\wedge dx^j$$

$$=-g^{qp}\nabla_q\theta_p\sqrt{g}\,dx^1\wedge dx^2$$

$$\therefore\quad \delta\theta=*d*\theta=-g^{qp}\nabla_q\theta_p$$

(2)
$$*\pi=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ji}\pi_{ji}$$

$$\therefore\quad d*\pi=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}(\varepsilon^{ji}\nabla_k\pi_{ji})dx^k$$

$$\delta\pi=-*d*\pi=\frac{1}{2}\sqrt{g}\,\varepsilon_{kq}g^{qp}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ji}\nabla_p\pi_{ji}\right)dx^k$$

$$=(g^{2p}\nabla_p\pi_{12})dx^1+(g^{1p}\nabla_p\pi_{12})dx^2$$

$$\therefore\quad \delta\pi=-(g^{qp}\nabla_p\pi_{qi})dx^i$$

(3)
$$df=(\nabla_i f)dx^i$$

$$\delta(df)=-g^{ji}\nabla_j\nabla_i f$$

$$\therefore\quad \Delta f=d\delta f+\delta df=0+\delta(df)=-g^{ji}\nabla_j\nabla_i f$$

(4)
$$d\delta\theta=-d(g^{qp}\nabla_q\theta_p)=-(g^{qp}\nabla_i\nabla_q\theta_p)dx^i$$

$$\delta d\theta=\frac{1}{2}\delta[(\nabla_j\theta_i-\nabla_i\theta_j)dx^j\wedge dx^i]$$

$$=-g^{qp}\nabla_q(\nabla_p\theta_i-\nabla_i\theta_p)dx^i$$

$$=-(g^{qp}\nabla_q\nabla_p\theta_i)dx^i+(g^{qp}\nabla_q\nabla_i\theta_p)dx^i$$

$$\therefore\quad \Delta\theta=d\delta\theta+\delta d\theta=-(g^{qp}\nabla_q\nabla_p\theta_i)dx^i$$

$$-g^{qp}(\nabla_i\nabla_q\theta_p-\nabla_q\nabla_i\theta_p))dx^i$$

$$=-(g^{qp}\nabla_q\nabla_p\theta_i-g^{qp}R_{iqp}{}^h\theta_h)dx^i$$

$$\therefore \quad \Delta\theta = -(g^{qp}\nabla_q\nabla_p\theta_i - R_i{}^h\theta_h)dx^i \qquad \text{（证毕）}$$

公式
$$*\Delta = \Delta * \tag{39.19}$$

〈**证明**〉 运用(39.7)，(39.12)，(39.16)。对于 p 次微分形式 ω，

$$*\Delta\omega = *(d\delta + \delta d)\omega = (-1)^p(\delta * \delta - d * d)\omega$$
$$= (\delta d + d\delta) * \omega = \Delta * \omega \qquad \text{（证毕）}$$

调和形式 在有向二维黎曼空间(M,g)里，如果 p 次微分形式 ω 满足

$$\Delta\omega = 0$$

时，ω 叫做 **p 次调和形式**。由(39.19)可见，下列性质成立：

如果 ω 是调和形式，则 $*\omega$ 也是调和形式。

《**注意**》 一般地说，在 n 维黎曼空间(M,g)上，由 (39.1) 定义映射

$$*: C^p(M) \to C^{n-p}(M)$$

而对于 p 次微分形式 ω，定义 $\delta\omega$ 为

$$\delta\omega = (-1)^{np+n+1} * d *$$

则
$$\delta: C^p(M) \to C^{p-1}(M), \quad (p>0)$$
$$\delta: C^0(M) \to \{0\}$$

于是对于 p 次微分形式 ω，

$$\delta^2 = 0, \quad **\omega = (-1)^{p(n-p)}\omega$$

成立。除此之外，

$$*\Delta = \Delta *$$

也成立。故设 (M,g) 的 p 次调和形式的全体所作实向量空间为 $H^p(M)$，则 $*$ 决定如下映射：

$$*: H^p(M) \to H^{n-p}(M) \tag{39.20}$$

在此映射 $*$ 下，$H^p(M)$ 与 $H^{n-p}(M)$ 同构。

一般地说，对于有向 n 维黎曼空间的 0 次，一次，二次微分形式，例 39.1 的公式照样成立。而同样的公式对于 p 次微分形式来说在推广了的形状下也成立。但略去。

§40 黎曼空间的上同调

在本节里假设(M,g)是有向，而且紧致的二维黎曼空间。$f,g\in C^0(M)$ 的内积的定义是 $(f,g)=fg$。$\theta,\varphi\in C^1(M)$ 的内积的定义是 $(\theta,\varphi)=g^{ji}\theta_j\varphi_i$。但设 $\theta=\theta_i dx^i$，$\varphi=\varphi_i dx^i$ 分别是 θ 与 φ 的局部表示。$\omega,\pi\in C^2(M)$ 的内积的定义是

$$(\omega,\pi)=g^{qj}g^{pi}\omega_{qp}\pi_{ji}$$

但设 $$\omega=\frac{1}{2}\omega_{ji}dx^j\wedge dx^i,\quad \pi=\frac{1}{2}\pi_{ji}dx^j\wedge dx^i$$

分别是 ω 与 π 的局部表示。

其次定义 $\omega,\pi\in C^p(M)$ $(p=0,1,2)$的**（大范围）内积**为

$$\langle\omega,\pi\rangle=\int_M(\omega,\pi)d\sigma=\int_M\omega\wedge*\pi \tag{40.1}$$

式中 $d\sigma$ 是(M,g)的体积素。下列性质成立。

$$\langle\omega,\omega\rangle\geqslant 0;\quad \langle\omega,\omega\rangle=0\Longleftrightarrow\omega=0\quad(\omega\in C^p(M)) \tag{40.2}$$

$$\begin{aligned}&\langle\omega,\eta\rangle=\langle\eta,\omega\rangle\\ &\langle a\omega+b\pi,\eta\rangle=a\langle\omega,\eta\rangle+b\langle\pi,\eta\rangle,\end{aligned}\quad(\omega,\pi,\eta\in C^p(M)) \tag{40.3}$$

式中 a 与 b 是常数。尚有以下公式成立。

公式

$$\langle d\omega,\eta\rangle=\langle\omega,\delta\eta\rangle,\quad(\omega\in C^p(M),\ \eta\in C^{p+1}(M)) \tag{40.4}$$

〈**证明**〉 $$\begin{aligned}d(\omega\wedge*\eta)&=d\omega\wedge*\eta+(-1)^p\omega\wedge d*\eta\\&=d\omega\wedge*\eta-\omega\wedge*((-1)^{p-1}*^{-1}d*\eta)\\&=d\omega\wedge*\eta-\omega\wedge*\delta\eta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad 0=\int_M d(\omega\wedge*\eta)&=\int_M d\omega\wedge*\eta-\int_M\omega\wedge*\delta\eta\quad(\because\ \partial M=0)\\&=\langle d\omega,\eta\rangle-\langle\omega,\delta\eta\rangle\end{aligned}$$
（证毕）

下列公式成立。

公式

$$\langle\Delta\omega,\omega\rangle=(\delta\omega,\delta\omega)+\langle d\omega,d\omega\rangle,\quad(\omega\in C^p(M)) \tag{40.5}$$

〈证明〉 $\langle \Delta\omega, \omega \rangle = \langle (d\delta + \delta d)\omega, \omega \rangle = \langle d\delta\omega, \omega \rangle + \langle \delta d\omega, \omega \rangle$

$$= \langle \delta\omega, \delta\omega \rangle + \langle d\omega + d\omega \rangle$$ （证毕）

下列公式也成立。

公式

$$\Delta\omega = 0 \Longleftrightarrow d\omega = 0, \quad \delta\omega = 0 \tag{40.6}$$

〈证明〉 首先设 $d\omega = 0$，$\delta\omega = 0$，则

$$\Delta\omega = d\delta\omega + \delta d\omega = d0 + \delta 0 = 0$$

反之，设 $\Delta\omega = 0$，则

$$0 = \langle \Delta\omega, \omega \rangle = \langle \delta\omega, \delta\omega \rangle + \langle d\omega, d\omega \rangle$$

然因 $\langle \delta\omega, \delta\omega \rangle \geqslant 0$，$\langle d\omega, d\omega \rangle \geqslant 0$，故

$$\langle \delta\omega, \delta\omega \rangle = 0, \quad \langle d\omega, d\omega \rangle = 0$$

∴ $$\delta\omega = 0, \quad d\omega = 0$$ （证毕）

即下列定理成立。

定理 6.14 在有向、紧致的二维黎曼空间（M, g）上，微分形式 ω 为调和形式的充要条件是

$$d\omega = 0, \quad \delta\omega = 0$$

特别是 C^∞ 函数 f 为调和函数（0 次调和形式）的充要条件是 f 一定。

人们知道下列定理。

定理 6.15 在有向、紧致的二维黎曼空间（M, g）上，对于 p 次上同调群 $H^p(M)$ 的各元，必只存在一个 p 次调和形式包含于其中，用此 p 次调和形式做为各元的代表元得 $H^p(M)$ 与 $\boldsymbol{H}^p(M)$（参照 p.248）同构。

〈证明〉 略。

定理 6.16 在定理 6.15 的条件下，M 的贝蒂数由

$$\beta_p = \dim H^p(M) = \dim \boldsymbol{H}^p(M)$$

决定。

〈证明〉 由定理 6.14 可见，显然成立。

《注意》 一般来说，对于有向、紧致的 n 维黎曼空间（M, g），定理 6.14，6.15，6.16 成立。又由前节（39.20）可见 $\boldsymbol{H}^p(M)$ 与

$H^{n-p}(M)$ 同构，故关于贝蒂数

$$\beta_p = \beta_{n-p} \tag{40.7}$$

成立，因此

$$H^p(M) \approx H^{n-p}(M) \tag{40.8}$$

成立。(40.7)与(40.8)叫做**庞加莱对偶定理**。

格林公式 设 (M,g) 为有向、紧致的二维黎曼空间，$\boldsymbol{X}$ 为 M 上任意向量场，$\boldsymbol{X}=X^i\partial/\partial x^i$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的局部表示。又设一次微分形式 u 为

$$u = X_i dx^i \quad (X_i = g_{ih}X^h)$$

则

$$\begin{aligned} d*u &= d[(\sqrt{g}\,\varepsilon_{iq}g^{qp}X_p)dx^i] \\ &= -\sqrt{g}(\varepsilon_{1q}g^{qp}\nabla_2 X_p - \varepsilon_{2q}g^{qp}\nabla_1 X_p)dx^1\wedge dx^2 \\ &= -(g^{qp}\nabla_q X_p)\sqrt{g}\,dx^1\wedge dx^2 \\ &= -(\mathrm{div}\boldsymbol{X})d\sigma \quad (\mathrm{div}\boldsymbol{X} = \nabla_i X^i) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \int_M \mathrm{div}\boldsymbol{X}d\sigma = -\int_M d*u = -\int_{\partial M} *u = 0 \quad (\because \partial M = 0)$$

整理一下，得下列定理。

定理 6.17（格林） 有向而且紧致的二维黎曼空间 (M,g) 上的任意向量场 $\boldsymbol{X}$ 满足

$$\int_M \mathrm{div}\boldsymbol{X}d\sigma = 0 \tag{40.9}$$

式中 $d\sigma$ 是 (M,g) 的体积素。

《**注意**》 一般地说，对于有向而且紧致的 n 维黎曼空间 (M,g)，定理 6.17 照样成立。

在研究紧致黎曼空间的性质时，在上述定理里所说格林公式(40.9)起重要的作用。

习 题 六

1. 给球面安上 $p(\geqslant 0)$ 个把得闭曲面 S_p。对于和它同胚的二维黎曼空间 (M,g)，试证下列事实。

(1) 如果 $p=0$，则关于曲率 K，存在 $K(P)>0$ 的点 P。

(2) 如果 $p=1$，则存在 $K(P)=0$的点 P。

(3) 如果 $p>1$，则存在 $K(P)<0$的点 P。

2. 设(M,g)为有向、紧致的 n 维黎曼空间，对于M上的 C^∞ 函数 f，试证下列性质。

(1) $$\int_M \Delta f d\sigma = 0$$

(2) $$\Delta f^2 = 2f\Delta f + 2\|\Delta f\|^2$$

(3) $$\int_M f\Delta f d\sigma = -\int \|df\|^2 d\sigma \leqslant 0$$

(4) $$\int_M f\Delta f d\sigma = 0 \Longleftrightarrow f = \text{常数}$$

(5) 如果 $\Delta f \geqslant 0 (\Delta f \leqslant 0)$，则 $\Delta f = 0$，f一定。

3. 设欧氏空间 E^3 里的曲面 S 的局部方程为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u^1,u^2)$。试证以下性质。

(1) S 为极小曲面的充要条件是

$$g^{ji}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial u^j \partial u^i} - \left\{ {h \atop ij} \right\} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^h}\right) = 0$$

(2) 设位置向量 $\boldsymbol{x}(u^1,u^2)$ 的分量为 $x(u^1,u^2)$，$y(u^1,u^2)$，$z(u^1,u^2)$。则 S 为极小曲面的充要条件是

$$\Delta x = 0, \quad \Delta y = 0, \quad \Delta z = 0$$

即 x,y,z 为 S 上的调和函数。

(3) 在 E^3 里不存在紧致极小曲面。

4. 对于 n 维流形M，试证下列性质。

(1) $$\omega \in Z^p(M), \quad \pi \in Z^q(M) \Longrightarrow \omega \wedge \pi \in Z^{p+q}(M)$$
$$\omega \in B^p(M), \quad \pi \in Z^q(M) \Longrightarrow \omega \wedge \pi \in B^{p+q}(M)$$
$$\omega \in Z^p(M), \quad \pi \in B^q(M) \Longrightarrow \omega \wedge \pi \in B^{p+q}(M)$$

(2) 令

$$Z(M) = \sum_{p=0}^{n} Z^p(M), \quad B(M) = \sum_{p=0}^{n} B^p(M), \quad H(M) = \sum_{p=0}^{n} H^p(M)$$

这时，$Z(M)$ 是以外积为乘积的多元环。

(3) $B(M)(\subset Z(M))$为 $Z(M)$的理想。

(4) $H(M)=Z(M)/B(M)$（叫做M的**上同调环**）.

5. 对于有向、紧致的流形M，设$H^p(M)$为p次调和形式全体所作向量空间（固定M上的某黎曼度量 g 来考虑）。试证下列性质。

(1) $\langle\omega,\pi\rangle=0,\quad(\omega\in H^p(M),\quad \pi\in dC^{p+1}(M))$

(2) $\langle\omega,\pi\rangle=0,\quad(\omega\in H^p(M),\quad \pi\in \delta C^{p-1}(M))$

(3) $\langle\omega,\pi\rangle=0,\quad(\omega\in dC^{p+1}(M),\ \pi\in \delta C^{p-1}(M))$

习　题　解　答

第　一　章

§1. 【问题 1.1】 (1) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=1$，$2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}'=0$，$\therefore\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}'=0$
(2) 显然。

【问题 1.2】 (1) $\|\boldsymbol{A}\|^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$，$\therefore\ \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}\|'=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}'$

(2) $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}'-\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{B})'=\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{B}'+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}''-\boldsymbol{A}''\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{B}'$

$$=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}''-\boldsymbol{A}''\cdot\boldsymbol{B}.$$

(3) $|\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}|'=\{\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\}'=\boldsymbol{A}'\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})+\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}'\times\boldsymbol{C})$
$+\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}')=|\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}|+|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}|+|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}'|$.

§2 【问题 2.1】 显然。

【问题 2.2】 $d\bar{s}/ds=1$，$\therefore\ \bar{s}=s+a$.

§3 【问题 3.1】 根据定义作计算。

【问题 3.2】 $\dot{\boldsymbol{x}}=v\boldsymbol{t}$，　$\ddot{\boldsymbol{x}}=\dot{v}\boldsymbol{t}+v\dot{\boldsymbol{t}}=\dot{v}\boldsymbol{t}+v(\kappa v\boldsymbol{n})=\dot{v}\boldsymbol{t}+\kappa v^2\boldsymbol{n}$.

【问题 3.3】 从公式 3.15，显然。

【问题 3.4】 从公式 3.15，显然。

【问题 3.5】 设 x 轴与 $\boldsymbol{t}$ 的夹角为 θ，则 $\kappa=d\theta/ds$. 然因 $\theta=\tan^{-1}f'$，$\therefore\ \kappa=f''/[1+(f')^2]^{3/2}$

习　题　一

1. $3\sqrt{2}\sinh 2a$.

2. (1) 运用弗雷内公式。

(2) 运用（1）的结果。

3. (1) 试曲线的方程为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$. 因切线通过定点，故存在某函数 $f(s)\neq0$ 使得 $\boldsymbol{x}(s)+f(s)\boldsymbol{t}=\boldsymbol{a}$（常向量）。$\therefore\ \boldsymbol{x}'+f'\boldsymbol{t}+f\boldsymbol{t}'=0$，$(1+f')\boldsymbol{t}+f\kappa\boldsymbol{n}=0$，$\therefore\ 1+f'=0$，$f\kappa=0$，$\therefore\ \kappa=0$

(2) $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{a}$（常向量）$\therefore\ \boldsymbol{t}'=0$.

4. $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})=a$，（$\boldsymbol{c}$ 为常向量），$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{t}=0$，

$\kappa(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{n}+1=0$。$\kappa\neq0$ 之故，$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{n}=-1/\kappa$，$\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{n}+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{n}'=(1/\kappa)'$，$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot(-\kappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b})=(1/\kappa)'$。因为 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{t}=0$，所以 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=\kappa'/\kappa^2\tau$ （$\because\tau\neq0$）。$\therefore$ $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})=-(1/\kappa)\boldsymbol{n}+(\kappa'/\kappa^2\tau)\boldsymbol{b}$。然因 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})=a^2$，故得所求公式。

5. 运用 4 的结果。

6. 运用 2.(2)。设 P，Q 分别为 $\boldsymbol{x}(0)$，$\boldsymbol{x}(s)$，则 $\overline{PQ}^2=s^2\cdot(1-(\kappa_0^2/12)s^2+\cdots)$，$\overline{PQ}=s(1-(\kappa_0^2/12)s^2+\cdots)^{1/2}=s(1+(\kappa_0^2/24)s^2+\cdots)=s+(\kappa_0^2/24)s^3+\cdots$. 故 $(\overline{PQ}-s)/s^3\to\kappa_0^2/24$，$(s\to0)$。

7. (1) $d\overline{\boldsymbol{x}}/ds=\boldsymbol{t}'+h'\boldsymbol{t}+h\kappa\boldsymbol{n}$。故 $\boldsymbol{x}'\perp d\overline{\boldsymbol{x}}/ds\Longleftrightarrow h'+1=0\Longleftrightarrow h=-s+c$。

(2) $d\overline{\boldsymbol{x}}/d\overline{s}=\boldsymbol{n}$，$d^2\overline{\boldsymbol{x}}/d\overline{s}^2=(d\boldsymbol{n}/ds)(d\overline{s}/ds)^{-1}=(-\kappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b})\cdot(d\overline{s}/ds)^{-1}$。

然而

$$(d\overline{s}/ds)^2=\|d\overline{\boldsymbol{x}}/ds\|^2=(c-s)^2\kappa^2$$

$$\therefore\quad \overline{\kappa}^2=\|d^2\overline{\boldsymbol{x}}/d\overline{s}^2\|^2=\|-\kappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b}\|^2/(c-s)^2\kappa^2$$
$$=(\kappa^2+\tau^2)/(c-s)^2\kappa^2$$

8. 令 $\overline{\boldsymbol{x}}(s)=\boldsymbol{x}(s)+\rho(s)\boldsymbol{n}(s)$. $\|d\overline{\boldsymbol{x}}/ds\|=\|\boldsymbol{t}+\rho'\boldsymbol{n}+\rho(-\kappa\boldsymbol{t})\|=\rho'$ （设 $\rho'>0$） $\therefore\int\|d\overline{\boldsymbol{x}}/ds\|ds=\int\rho'ds=\rho+c$。

9. $\dot{\boldsymbol{x}}=a\boldsymbol{g}\times\dot{\boldsymbol{g}}$，$\ddot{\boldsymbol{x}}=a\boldsymbol{g}\times\ddot{\boldsymbol{g}}+a\dot{\boldsymbol{g}}\times\dot{\boldsymbol{g}}=a\boldsymbol{g}\times\ddot{\boldsymbol{g}}$，$\dddot{\boldsymbol{x}}=a\dot{\boldsymbol{g}}\times\ddot{\boldsymbol{g}}+a\boldsymbol{g}\times\dddot{\boldsymbol{g}}$，因 $\|\boldsymbol{g}\|=1$，故 $\boldsymbol{g}\perp\dot{\boldsymbol{g}}$。$\therefore$ $\|\dot{\boldsymbol{x}}\|^2=a^2\|\dot{\boldsymbol{g}}\|^2$。$\dot{\boldsymbol{x}}\times\ddot{\boldsymbol{x}}=a^2\cdot|\boldsymbol{g}\dot{\boldsymbol{g}}\ddot{\boldsymbol{g}}|\boldsymbol{g}$。$\therefore\kappa=|\dot{\boldsymbol{x}}\times\ddot{\boldsymbol{x}}|/\|\dot{\boldsymbol{x}}\|^3=|\boldsymbol{g}\dot{\boldsymbol{g}}\ddot{\boldsymbol{g}}|/a\|\dot{\boldsymbol{g}}\|^3\neq0$ $|\dot{\boldsymbol{x}}\ddot{\boldsymbol{x}}\dddot{\boldsymbol{x}}|=a^3\cdot|\boldsymbol{g}\dot{\boldsymbol{g}}\ddot{\boldsymbol{g}}|^2$ $\therefore\tau=|\dot{\boldsymbol{x}}\ddot{\boldsymbol{x}}\dddot{\boldsymbol{x}}|/\|\dot{\boldsymbol{x}}\times\ddot{\boldsymbol{x}}\|^2=a^{-1}$

10. $dx/dt=f$，$dy/dt=g$。因与母线夹定角，故 $\cos\alpha=\pm(dz/dt)/\sqrt{\dot{f}^2+\dot{g}^2+\dot{z}^2}$，$\dot{z}^2=\cot^2\alpha(\dot{f}^2+\dot{g}^2)$ $\therefore z=\pm\cot\alpha\int\sqrt{\dot{f}^2+\dot{g}^2}\,dt$

11. $f_xdx+f_ydy+f_zdz=0$，$g_xdx+g_ydy+g_zdz=0$。

$$\therefore\quad dx:dy:dz=\begin{Vmatrix}f_y & f_z\\ g_y & g_z\end{Vmatrix}:\begin{Vmatrix}f_z & f_x\\ g_z & g_x\end{Vmatrix}:\begin{Vmatrix}f_x & f_y\\ g_x & g_y\end{Vmatrix}.$$

故切向量的分量为

$$\left(\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} f_z & f_x \\ g_z & g_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}\right)$$

12. $\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & \varphi' \\ -a\cos t & -a\sin t & \varphi'' \\ a\sin t & -a\cos t & \varphi''' \end{vmatrix} = 0,$

$a^2\varphi''' + a^2\varphi' = 0 \quad \therefore \varphi' = A\cos t + B\sin t, \quad \varphi = p\cos t + q\sin t + r$

（p, q, r 为常数）

13. （1），（2），（3）显然。

第　二　章

§5 【问题 5.1】 此曲面的参数表示可以表示为 $x=u$, $y=v$, $z=f(u, v)$。故

$$\begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{pmatrix}$$

的秩等于 2．

§7 【问题 7.1】 （1），（2）省略。

【问题 7.2】 显然。

【问题 7.3】 从 Xf 的定义显然。

【问题 7.4】 （1），（2），（3）显然。

【问题 7.5】 $[X,Y](fg) = X(Y(fg)) - Y(X(fg)) = X((Yf)g + f(Yg)) - Y((Xf)g + f(Xg)) = (XYf)g + (Yf)(Xg) + (Xf)(Yg) + f(XYg) - (YXf)g - (Xf)(Yg) - (Yf)(Xg) - f(YXg) = ([X,Y]f)g + f([X,Y]g)$。第二式显然成立。

【问题 7.6】 设 f 为任意的 C^∞ 函数．$[X,[Y,Z]]f = X([Y,Z]f) - [Y,Z](Xf) = X(YZf - ZYf) - YZXf + ZYXf = XYZf - XZYf - YZXf + ZYXf$。

$\therefore \quad [X,[Y,Z]]f + [Y,[Z,X]]f + [Z,[X,Y]]f = 0$

【问题 7.7】 计算 $[X,Y]u^1$ 与 $[X,Y]u^2$。

§8 【问题 8.1】 （1），（2）显然。

【问题 8.2】 （1），（2），（3）根据定义计算之。

【问题 8.3】 用参数表示 $u=f(t,a), v=t$ 表示此通解。显然。

【问题 8.4】 根据（8.14）显然。

§9 【问题 9.1】 显然。

【问题 9.2】 显然。

【问题 9.3】 根据（9.18），在 $O\cap\overline{O}$ 里，$\det(\overline{H}_{ji})=\{\partial(u,v)/\partial(\overline{u},\overline{v})\}\det(H_{ji})$。还有 $\det(\overline{g}_{ji})=\{\partial(u,v)/\partial(\overline{u},\overline{v})\}\det(g_{ji})$。故在 $O\cap\overline{O}$ 里 $\overline{K}=K$。

【问题 9.4】 在点 P'，$f=0$，$f_x=f_y=0$，$N_P(0,0,1)$。故

$$f(x,y)=f(P)+f_x(P)x+f_y(P)y+\frac{1}{2}f_{xx}(P)x^2+2f_{xy}(P)xy$$

$$+f_{yy}(P)y)^2+(\text{高次项})=\frac{1}{2}(f_{xx}(P)x^2+2f_{xy}(P)xy+f_{yy}(P)y^2)$$

+高次项。然而，根据（9.8)，在点 P，$L=f_{xx}, M=f_{xy}, N=f_{yy}$，（运用 $N_p(0,0,1)$）。故得所求结果。

【问题 9.5】（1），（2）显然。

§10 【问题 10.1】（1），（2）显然。

【问题 10.2】 $\overline{h}=\sum_{j,i}\overline{g}^{ji}\overline{H}_{ji}=\operatorname{sign}\left(\frac{\partial(\overline{u},\overline{v})}{\partial(u,v)}\right)$

$$\cdot\sum_{j,i}\left(\sum_{s,r}\frac{\partial\overline{u}^j}{\partial u^s}\frac{\partial\overline{u}^i}{\partial u^r}g^{sr}\right)\left(\sum_{q,p}\frac{\partial u^q}{\partial\overline{u}^j}\frac{\partial u^p}{\partial\overline{u}^i}H_{qp}\right)$$

$$=\operatorname{sign}\left(\frac{\partial(\overline{u},\overline{v})}{\partial(u,v)}\right)\sum_{s,r}\sum_{p,q}\delta^q_s\delta^p_r g^{sr}H_{qp}=\operatorname{sign}\left(\frac{\partial(\overline{u},\overline{v})}{\partial(u,v)}\right)\sum_{q,p}g^{pq}H_{pq}$$

$$=\operatorname{sign}\left(\frac{\partial(\overline{u},\overline{v})}{\partial(u,v)}\right)h$$

【问题 10.3】 显然。

【问题 10.4】 $F=0$ 显然。将 $\xi^1=1$，$\xi^2=0$ 代入（10.14）。

习　题　二

1. $\begin{pmatrix}\partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u\\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f'\cos v & f'\sin v & g'\\ -f\sin v & f\cos v & 0\end{pmatrix}$

因为 $f'f\neq 0$，所以上述矩阵的秩等于 2。

2. $x_u = y' + vy''$， $x_v = y'$。 $\therefore x_u \times x_v = vy'' \times y' \neq 0$（$\because v \neq 0$，$y'' \times y' \neq 0$）。

3. （1）省略。

（2）由习题二之 2 可见，$x_u = y' + vy''$，$x_v = y'$。故 $E = x_u \cdot x_u = y' \cdot y' + v^2 y'' \cdot y'' = 1 + \kappa^2$， $F = x_u \cdot x_v = y' \cdot y' = 1$， $G = x_v \cdot x_v = y' \cdot y' = 1$。

4. （1）显然。

（2）任意取两条 v 曲线 $u = u_1$ 与 $u = u_2$。它们与任意 u 曲线 $v = v_0$ 截取的弧长是 $\int_{u_1}^{u_2} du = u_2 - u_1$，与 v_0 无关。

5. 运用 $N = x_u \times x_v / \sqrt{g}$ 以及 $L = x_{uu} \cdot N$， $M = x_{uv} \cdot N$， $N = x_{vv} \cdot N$。

6. （1）如用习题二之 5 的结果，显然。

（2）从（1）的结果可得 $LN - M^2 < 0$。

7. 运用习题二之 2。$x_u = y' + vy''$， $x_v = y'$， $x_{uu} = y'' + vy'''$， $x_{uv} = y''$， $x_{vv} = 0$。然而 $x_u \times x_v = v\kappa b$。（$b$ 为 c 的单位副法向量）。故

$$M = 0, \quad N = 0, \quad \therefore K = (LN - M^2)/g = 0$$

8. 因为点 P 是椭圆点，所以在点 P， $K > 0$。故取点 P 的充分小邻域 O，O 内的点全是椭圆点。再运用（9.15），对于 O 内的所有点，$d > 0$（或 < 0）。即 O 内所有点全在点 P 处的切平面的一侧。

9. 略。

10. 运用习题二之 5 的结果得

$$L = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \cosh u \cos v & \cosh u \sin v & 0 \\ \sinh u \cos v & \sinh u \sin v & 1 \\ -\cosh u \sin v & \cosh u \cos v & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\sinh u \cosh u}{\sqrt{g}},$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} -\cosh u \cos v & \cosh u \sin v & 0 \\ \sinh u \cos v & -\sinh u \sin v & 1 \\ -\cosh u \sin v & \cosh u \cos v & 0 \end{vmatrix} = \frac{\sinh u \cosh u}{\sqrt{g}}.$$

$$\therefore h = L + N = 0.$$

11. 设 S_1 与 S_2 的单位法向量分别为 N_1 与 N_2。设 c 的单位主法向量为 n，沿 c 可得下式．$k_1=\kappa n\cdot N_1$，$k_2=\kappa n\cdot N_2$。

$$\therefore k_1N_2-k_2N_1=\kappa[(n\cdot N_1)N_2-(n\cdot N_2)N_1]=\kappa(N_1\times N_2)\times n.$$

$$\therefore \|k_1N_2-k_2N_1\|^2=\kappa^2[(N_1\times N_2)\times n]\cdot[(N_1\times N_2)\times n]$$
$$=\kappa^2[(N_1\times N_2)\cdot(N_1\times N_2)-((N_1\times N_2)\cdot n)^2]$$
$$=\kappa^2\|N_1\times N_2\|^2.$$

$$\therefore k_1^2+k_2^2-2k_1k_2\cos\alpha=\kappa^2\sin^2\alpha$$

12 运用习题二之11 的符号．$N_1\cdot N_2=$常数．$\therefore$ $(dN_1/dt)\cdot N_2+N_1(dN_2/dt)=0$.如果 c 为 S_1 的曲率线，则 $dN_1/dt=-\kappa(dx/dt)$ $\therefore$ $-k_1(dx/dt)\cdot N_2+N_1\cdot(dN_2/dt)=0$。然而 $N_2\cdot(dx/dt)=0$。$\therefore$ $N_1\cdot(dN_2/dt)=0$。$\therefore$ $dN_2/dt\perp N_1$。此外 $dN_2/dt\perp N_2$。故 dN_2/dt 与 dx/dt 平行。故可设 $dN_2/dt=-k_2(dx/dt)$。即 c 为曲面 S_2 上的曲率线。

13. 运用习题二之 2 以及平面或球面上的所有曲线都是曲率线。

14. 如果运用定理 2.4 显然。

15. 因第二基本量为 $(H_{ji})=\begin{pmatrix}k_1 & 0\\ 0 & k_2\end{pmatrix}$，故由温加顿方程，显然。

16. (1) 根据 (10.1) 显然。(2) 因为在椭圆点 $H_{11}H_{22}-(H_{12})^2>0$，所以 (1) 的方程无实根。(3) 因为在双曲点 $H_{11}H_{22}-(H_{12})^2<0$，所以 (1) 的方程有实的不同根 $\xi^1:\xi^2$。(4) 显然。

17. (1) 双曲点的充分小邻域O里的点全是双曲点.在O里，二次微分方程$L(du)^2+2Mdudv+N(dv)^2=0$具有独立的二解$f(u,v)=C_1$与 $g(u,v)=C_2$ (C_1,C_2 是任意常数)。令 $\bar{u}=f(u,v)$，$\bar{v}=g(u,v)$，则 $(\bar{u},\bar{v})$ 变为O里的坐标系，其坐标曲线都是渐近线。

(2) $u=$常数与 $v=$常数为渐近线的充要条件分别是 $L=0$ 与 $M=0$。

(3) 对于包含于曲面上的直线 c，$d^2x/ds^2=0$ $\therefore$ $H(\dot{c},\dot{c})=0$。

18. 设在 S 的坐标系 (u, v) 下，坐标曲线为曲率线。$\overline{x}_u = x_u + rN_u = x_u - (r/k_1)x_u = (1 - r/k_1)x_u$。同理 $\overline{x}_v = (1 - r/k_2)x_v$. $\therefore \overline{x}_u \times \overline{x}_v = (1 - r/k_1)(1 - r/k_2)x_u \times x_v$. 因为 $x_u \times x_v \neq 0$,故当 $r \neq k_1, k_2$ 时，$\overline{x}_u \times \overline{x}_v \neq 0$。

(2) $\overline{x}_u = x_u + rN_u$, $\overline{x}_v = x_v + rN_v$. $\therefore \overline{g}_{ji} = \overline{x}_j \cdot \overline{x}_i = (x_j + rN_j) \cdot (x_i + rN_i)$，$(N_i = \partial N/\partial u^i)$. $\therefore \overline{g}_{ji} = g_{ji} + r(x_j \cdot N_i + x_i \cdot N_j) + r^2 N_j \cdot N_i$。然而 $H_{ji} = (\partial^2 x/\partial u^j \partial u^i) \cdot N = -(\partial x/\partial u^j) \cdot N_i = -(\partial x/\partial u^i) \cdot N_j$。还有 $N_j = -H_j{}^i x_i$。$\therefore N_j \cdot N_i = g^{qp} H_{qj} H_{pi} = C_{ji}$。整理一下，得 $\overline{g}_{ji} = g_{ji} - 2rH_{ji} + r^2 C_{ji}$ 。 其次是 $\overline{x}_1 \times \overline{x}_2 = (x_1 + rN_1) \times (x_2 + rN_2) = x_1 \times x_2 + r(N_1 \times x_2 + x_1 \times N_2) + r^2 N_1 \times N_2 = x_1 \times x_2 + r(-k_1 x_1 \times x_2 - k_2 x_1 \times x_2) + r^2 k_1 k_2 x_1 \times x_2 = a(x_1 \times x_2)$ （a 为某个 C^∞ 函数）。$\therefore$ $\overline{N} = N$，（设 S_r 的单位法向量为$\overline{N}$）。此外，$\overline{x}_i = x_i + rN_i$。$\partial^2 \overline{x}/\partial u^j \partial u^i = \partial^2 x/\partial u^j \partial u^i + r\partial N_i/\partial u^j = \partial^2 x/\partial u^j \partial u^i - rH_i{}^h \partial^2 x/\partial u^j \partial u^h - r(\partial_j H_i{}^h) x_h$。故 $\overline{H}_{ji} = (\partial^2 \overline{x}/\partial u^j \partial u^i) \cdot \overline{N} = (\partial^2 \overline{x}/\partial u^j \partial u^i) \cdot N = H_{ji} - rH_i{}^h H_{jh} = H_{ji} - rC_{ji}$。

第 三 章

【问题11.1】 微分 $X \cdot N = 0$，$N \cdot N = 1$ 的两边，得 $(\partial_Y X) \cdot N + X(\partial_Y N) = 0, (\partial_Y N) \cdot N = 0$. $\therefore X \cdot (\partial_r N) = -H(Y, X) \cdot N; N \cdot (\partial_r N) = 0$。$\therefore \partial_r N = -L(Y)$。

【问题 11.2】 显然。

【问题 11.3】 显然。

【问题 11.4】 关于平面上的仿射坐标系，g_{ji} 是常数.故$\left\{ {k \atop j\,i} \right\} = 0$。

【问题 11.5】 $g_{jh} g^{hi} = \delta_j^i$，$(\partial_k g_{jh}) g^{hi} + g_{jh}(\partial_k g^{hi}) = 0$。将 (11.15) 代入此式，经整理便得。

【问题 11.6】 $\nabla_j \overline{X}^i = \partial \overline{X}^i/\partial \overline{u}^j + \left\{ {\overline{i} \atop jp} \right\} \overline{X}^p = \partial[(\partial \overline{u}^i/\partial u^q) X^q]/\partial u^p \cdot (\partial u^p/\partial \overline{u}^j) + (\partial \overline{u}^i/\partial u^s) \cdot \left[\left\{ {s \atop qr} \right\} (\partial u^q/\partial \overline{u}^j)(\partial u^r/\partial \overline{u}^p) + \partial^2 u^s/\partial \overline{u}^j \partial \overline{u}^p \right]$

$\cdot(\partial\bar{u}^p/\partial u^h)X^h=(\partial u^q/\partial\bar{u}^j)(\partial\bar{u}^i/\partial u^p)\nabla_q X^p$（参照§13 的简略记法）。

§12 **【问题 12.1】** 运用（12.6）。$k_1=\sqrt{EG-F^2}\cdot(du^1/ds)(\delta^2u^2/ds^2)=\sqrt{EG-F^2}(1/\sqrt{E})\left\{{2 \atop 11}\right\}(1/\sqrt{E})^2=\left\{{2 \atop 11}\right\}\cdot(\sqrt{EG-F^2}/E\sqrt{E})$。$k_2$也可同理求得。

【问题 12.2】 显然。

【问题 12.3】 显然。

【问题 12.4】 $\delta\|c'\|^2/ds=2g_{ji}(du^j/ds)(\delta^2u^i/ds^2)=0$。

【问题 12.5】 （1）如运用 $du^h/dt=(du^h/ds)(ds/dt)$，$\delta^2u^h/dt^2=(\delta^2u^h/ds^2)(ds/dt)^2+(du^h/ds)(d^2s/dt^2)$，显然。

（2）试证 $\alpha(t)=0$ 与 $d^2t/ds^2=0$ 等价。

§15 **【问题 15.1】** 显然。

【问题 15.2】 运用 φ 是一对一。

【问题 15.3】 在（15.3）里以 $\varphi^*(X)$ 与 $f\circ\varphi^{-1}$ 代替 $\bar{A}$ 与 $\bar{f}$。

【问题 15.4】 显然。

§16 **【问题 16.1】** （1），（2），（3），（4），（5），（6），（7），（8）显然。

习　题　三

1. $\partial\boldsymbol{N}/\partial u^j=-H_j{}^p\boldsymbol{x}_p$。$\therefore C_{ji}=H_j{}^pH_i{}^q\boldsymbol{x}_p\cdot\boldsymbol{x}_q=H_j{}^pH_i{}^qg_{pq}=H_{jp}H_i{}^p$。$\therefore C_{11}=H_{11}H_1{}^1+H_{12}H_1{}^2=H_{11}(H_1{}^1+H_2{}^2)-(H_{11}H_2{}^2-H_{12}H_1{}^2)=2hH_{11}-[H_{11}(H_{22}g_{11}-H_{21}g_{12})-H_{12}(-H_{11}g_{12}+H_{12}g_{11})]/g=2hH_{11}-Kg_{11}$。同理 $C_{12}=2hH_{12}-Kg_{12}$。$C_{22}=2hH_{22}-Kg_{22}$。

2. 运用 $H_{ji}=(\partial^2\boldsymbol{x}/\partial u^j\partial u^i)\cdot\boldsymbol{N}=(\partial^2\boldsymbol{x}/\partial u^j\partial u^i)\cdot(\boldsymbol{x}_1\times\boldsymbol{x}_2)/\sqrt{g}=|\partial^2\boldsymbol{x}/\partial u^j\partial u^i\ \ \boldsymbol{x}_1\ \ \boldsymbol{x}_2|/\sqrt{g}$。

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的分量分别为 A^h，B^h，又设 $A_i=g_{ih}A^h$，$B_i=g_{ih}B^h$。$H(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A})H(\boldsymbol{B},\boldsymbol{B})-H(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})^2=(H_{ji}A^jA^i)(H_{qp}B^qB^p)-(H_{ji}A^jB^i)(H_{qp}A^qB^p)=\begin{vmatrix}A^1 & A^2\\ B^1 & B^2\end{vmatrix}\cdot|H_{ji}|\cdot\begin{vmatrix}A^1 & B^1\\ A^2 & B^2\end{vmatrix}$

$$= |g_{ji}|^{-1} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A^1 & A^2 \\ B^1 & B^2 \end{vmatrix} \cdot |H_{ji}| = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_2 & B_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A^1 & B^1 \\ A^2 & B^2 \end{vmatrix} K_P$$

$$= \begin{vmatrix} (A,A) & (A,B) \\ (A,B) & (B,B) \end{vmatrix} K_P = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} K_P = K_P$$

4. $x_s = (1+v)t + v\kappa n$, $x_v = t$, $x_{ss} = (1+v)\kappa n + v\kappa' n + 2\kappa(-\kappa t + \tau b)$, $x_{sv} = t$, $x_{vv} = 0$. $\therefore N = x_s \times x_v / \|x_s \times x_v\| = -b$, $\therefore H_{11} = x_{ss} \cdot N = 2\kappa\tau$, $H_{12} = x_{sv} \cdot N = 0$, $H_{22} = x_{vv} \cdot N = 0$, $\therefore K = 0$ （参照定理 5.20, p.190）

5. $L = H_{11}$, $M = H_{12} = 0$, $N = H_{22}$, $g_{12} = 0$. 故 (13.6) 变为

$$L_v = L\begin{Bmatrix} 1 \\ 12 \end{Bmatrix} - N\begin{Bmatrix} 2 \\ 11 \end{Bmatrix} = (LGE_v)/(2EG) + (NEE_v)/(2EG)$$

$$= (E_v/2)[(L/E) + (N/G)].$$

$$N_u = -L\begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix} + N\begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix} = (LGG_v)/(2EG) + (NEG_u)/(2EG)$$

$$= (G_u/2)[(L/E) + (N/G)].$$

因此 $(L/E)_v = (E_v/2E)[(N/G) - (L/E)]$, $(N/G)_u = (G_u/2G)[(L/E) - (N/G)]$. 然因 $k_1 = L/E$, $k_2 = N/G$, 故得所求方程。

6. $\partial N/\partial u = \partial x/\partial u$, $\partial N/\partial v = 0$, $[\partial(x - N)]/\partial u = 0$, $\therefore x = N(u) + c(v)$, $\|x - c(v)\| = \|N\| = 1$. 其次, $c' = x_v$, $c'' = x_{vv}$. 然因 $N = 0$, $\begin{Bmatrix} h \\ j\,i \end{Bmatrix} = 0$, 故 $x_{vv} = 0$. $\therefore c = av + b$ (a, b 为常向量)。故 $\|x - (av + b)\| = 1$.

7. 与定理 3.17 同理可证。

8. 设 S 与 $\overline{S}$ 的线素为 ds^2 与 $d\overline{s}^2$, 则 $ds^2 = (-\sin u \cosh v du + \cos u \sinh v dv)^2 + (\cos u \cosh v du + \sin u \sinh v dv)^2 + dv^2 = \cosh^2 v du^2 + \cosh^2 v dv^2$, $d\overline{s}^2 = (\cos \overline{v} d\overline{u} - \overline{u} \sin \overline{v} d\overline{v})^2 + (\sin \overline{v} d\overline{u} + \overline{u} \cos \overline{v} d\overline{v})^2 + d\overline{v}^2 = d\overline{u}^2 + (1 + \overline{u}^2) d\overline{v}^2$. 故令 $\overline{u} = \sinh v$, $\overline{v} = u$, 则得 $ds^2 = d\overline{s}^2$.

9. (1), (2) 显然。

(3) 运用克氏记号的定义式。

(4) 显然。

(5) 运用（4）的结果以及曲率张量的定义式。

(6) 运用（4）的结果。

10. 运用（12.1）.

11. 实际计算。

12. 运用在$\overline{S}$里的测地线的微分方程。

13. (1)，(2) 显然.(3) 运用定理 3.8。

14. (1) 球面的全曲率是正的而且一定。平面的全曲率为 0 。

(2) 运用习题三之 9 (5).

15. 运用崩尼定理。

第 四 章

§17 **【问题 17.1】** 根据（17.4）显然。

【问题 17.2】 运用 $[X, Y]$ 的定义。

【问题 17.3】 根据定义计算 $[X, Y]x^h$。

§18 **【问题 18.1】** 显然。

【问题 18.2】 显然。

【问题 18.3】 显然。

§19 **【问题 19.1】** 若是求出 $\partial f/\partial x^i$，显然。

【问题 19.2】 显然。

【问题 19.3】 (1) $dx^h(\partial/\partial x^i)=(\partial/\partial x^i)x^h=\partial x^h/\partial x^i=\delta^h_i$

(2) $dx^h(X)=Xx^h=X^h$。

(3) $w(\partial/\partial x^i)=(w_j dx^j)(\partial/\partial x^i)=w_j\delta^j_i=w_i$。

【问题 19.4】 显然。

【问题 19.5】 显然。

【问题 19.6】 显然。

【问题 19.7】 显然。

【问题 19.8】 (1)，(2) 显然。

【问题 19.9】 导出 $u(X+Y)=u(X)+u(Y)$，$u(fX)=fu(X)$。

但X与Y为任意向量场，f 为任意 C^∞ 函数。

【问题 19.10】 显然。

§ 20 **【问题 20.1】** 显然。

【问题 20.2】 运用（20.7）。

【问题 20.3】 根据外积的定义，显然。

【问题 20.4】 $d^2 f = d(\partial_i f dx^i) = \partial_j \partial_i f dx^j \wedge dx^i = 0$ （$\because \partial_j \partial_i f = \partial_i \partial_j f$）。

【问题 20.5】 显然。

§ 21 **【问题 21.1】** 在（21.1）的各式里，取两边的外微分，再运用（21.1）。

【问题 21.2】 与高斯方程（13.5）等价。

【问题 21.3】 （1）取 $A^{-1}A = I$ 的两边的外微分得

$$dA^{-1}\cdot A + A^{-1}dA = 0,\ \therefore dA^{-1} = -A^{-1}dAA^{-1}.$$

（2）取（21.6）两边的外微分，并运用（1）的结果。

【问题 21.4】 显然。

【问题 21.5】 显然。

习　题　四

1. $[\partial/\partial x^j,\ \partial/\partial x^i]f = \partial^2 f/\partial x^j \partial x^i - \partial^2 f/\partial x^i \partial x^j = 0.$

2. 显然。

3. $du = \sum_{j<i}(\partial_j u_i - \partial_i u_j)dx^j \wedge dx^i.\ du(X,Y) = (\partial_j u_i - \partial_i u_j)X^j Y^i$ $= X^j\partial_j(u_i Y^i) - Y^i\partial_i(u_j X^j) - u_h(X^j\partial_j Y^h - Y^j\partial_j X^h) = Xu(Y) - Yu(X)$ $-u([X,\ Y]).$

4. 与上述习题四之3同样可证。

5. （1）$(ddf)(X,\ Y) = X(df(Y) - Y(df(X)) - df([X,\ Y])$ $= XYf - YXf - [X,\ Y]f = 0.$

（2）$(ddu)(X,Y,Z) = Xdu(Y,Z) - Ydu(X,Z) + Zdu(X,\ Y)$ $-du([X,\ Y],\ Z) + du([X,\ Z],\ Y) - du([Y,\ Z],X) = X\{Yu(Z)$

$-Zu(Y)-u([Y,Z])\}-Y\{Xu(Z)-Zu(X)-u([X,Z])\}$
$+Z\{Xu(Y)-Yu(X)-u([X,Y])\}-\{[X,Y]u(Z)-Zu([X,Y])$
$-u([X,Z],Y)\}+\{[X,Z]u(Y)-Yu([X,Z])-u([[X,Z],Y])$
$-\{[Y,Z],X]u(X)-Xu([Y,Z])-u([[Y,Z],X]\}=0.$

6. (1) $N(fX,Y)=[F(fX),FY]-F[F(fX),Y]-F[fX,FY]$
$+F(F[fX,Y])=\{f[FX,FY]-((FY)f)X\}-F\{f[FX,Y]-(Yf)X$
$-F\{f[X,FY]-((FY)f)X\}+F\{F(f[X,Y]-(Yf)X\}=fN(X,Y).$
同理 $$N(X,gY)=gN(X,Y).$$

(2) 如用（1）的结果，显然。

(3) 设 $X=\partial/\partial x^j$，$Y=\partial/\partial x^i$，则 $N(X,Y)$ 变为：
$N(\partial/\partial x^j,\partial/\partial x^i)=N_{ji}{}^h(\partial/\partial x^h)$。改变此式左边的形状可得所求结果。

7. 显然。

8. (1)，(2) 根据 L_X 的定义式易证。

9. (1)，(2) 根据 i_X 的定义式易证。

10. (1)，(2)，(3) 易证。

11. 如用上述习题四之 10 的结果，显然。

12. 显然。

第五章

§22 **【问题 22.1】** 显然。

【问题 22.2】 显然。

【问题 22.3】 $\nabla_k\delta_j^i=\partial_k\delta_j^i+\left\{{i \atop kp}\right\}\delta_j^p-\left\{{p \atop kj}\right\}\delta_p^i$

$$=0+\left\{{i \atop kj}\right\}-\left\{{i \atop kj}\right\}=0.$$

【问题 22.4】 如运用 (22.11)，易证。

【问题 22.5】 运用 $\nabla_k g_{ji}=0$。

【问题 22.6】 根据例 22.1，显然。

【问题 22.7】 (1)，(2) 运用 $g=\varepsilon^{i_1\cdots i_n}g_{1i_1}\cdots g_{ni_n}$ 与 g^{ji}

$=\varepsilon_{i_1\cdots i_n}g^{1i_1}\cdots g^{ni_n}$。

【问题 22.8】 易证。

【问题 22.9】 易证。

【问题 22.10】 显然。

【问题 22.11】 (1)，(2) 显然。

§23 **【问题 23.1】** $R_{ji}=g^{pq}R_{pjiq}=g^{pq}R_{iqpj}=g^{qp}R_{qijp}=R_{ij}$。

【问题 23.2】 (1) $\nabla_l R_{kji}{}^h+\nabla_k R_{jli}{}^h+\nabla_j R_{lki}{}^h=0$。令 $h=j$ 并求和得

$$\nabla_l R_{kmi}{}^m+\nabla_k R_{mli}{}^m+\nabla_m R_{lki}{}^m=0,\quad -\nabla_l R_{ki}+\nabla_k R_{li}+\nabla_m R_{lki}{}^m=0.$$

(2) 于 (1) 的两边乘以 g^{ki}，求和得

$$\therefore\ \nabla_l k-\nabla_m R_l{}^m=\nabla_m R_l{}^m\quad \therefore\ \nabla_l k=2\nabla_m R_l{}^m.$$

【问题 23.3】 (1)，(2) 运用[问题 23.2]之 (1),(2),显然。

【问题 23.4】 (1) (23.21) 的两边乘以 g^{kh} 并求和，易证。

(2) $R_{ji}=(n-1)ag_{ji}$ 的两边乘以 g^{ji} 并作和，易证。

【问题 23.5】 将 $R_{kjih}=a(g_{kh}g_{ji}-g_{jh}g_{ki})$ 代入比安基公式，得 $(\partial_l a)(g_{kh}g_{ji}-g_{jh}g_{ki})+(\partial_k a)(g_{jh}g_{li}-g_{lh}g_{ji})+(\partial_j a)(g_{lh}g_{ki}-g_{kh}g_{li})=0$。此式两边乘以 $g^{kh}g^{ji}$ 并求和得 $(n-1)(n-2)\partial_l a=0$。故如 $n\geqslant 3$，则

$$\partial_l a=0.$$

§24 **【问题 24.1】** (1)，(2)，(3) 显然。

(4) 设 $av(t)+bw(t)=0$ ($t\in I$; a 与 b 为常数)，则 $av(t_0)+bw(t_0)=0$。然因 $v(t_0)$ 与 $w(t_0)$ 线性无关，故 $a=b=0$。因此 $v(t)$ 与 $w(t)$ 线性无关。

【问题 24.2】 显然。

【问题 24.3】 容易。

§26 **【问题 26.1】** 在定理 5.19 的 (26.12) 里令 $K=1/a^2$。

§27 **【问题 27.1】** 运用定理 5.20，并且运用 (M,g) 与 $(\overline{M},\overline{g})$ 的测地极坐标，作映射 φ: $\overline{O}\to O$。

§28 **【问题 28.1】** 从 $\overline{f}\circ\varphi$ 的定义直接可证。

【问题 28.2】 说明 $\overleftarrow{A}$满足切向量的定义。

【问题 28.3】 运用（28.2）易证。

【问题 28.4】 显然。

【问题 28.5】 显然。

【问题 28.6】 显然。

习　题　五

1. （1）运用下列关系：

$$0=\nabla_k\nabla_j X^h-\nabla_j\nabla_k X^h=R_{kji}{}^h X^i.$$

（2）运用 $a_1X_{(1)}+\cdots+a_rX_{(r)}$ （a_1，…，a_r 为常数）为平行向量场．还要用如果平行向量在一点为0，则在各点为0．

（3）因为 $R_{kji}{}^h X^i_{(1)}=0$，…，$R_{kji}{}^h X^i_{(n)}=0$ 成立，在各点 $X^h_{(1)}$，…，$X^h_{(n)}$ 线性无关，所以 $R_{kji}{}^h=0$。

2. 运用 $\left\{\begin{matrix}h\\ ji\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}h\\ ij\end{matrix}\right\}$ 易证。

3. 显然。

4. （1），（2），（3）实际计算之，易得。

5. 给定条件的两边乘以 g^{ih} 并求和，得

$$\nabla_j k+\nabla_m R_j{}^m+\nabla_m R_j{}^m=0,\ \nabla_j k=-2\nabla_m R_j{}^m.$$

由此式以及［问题 23.2］的（2）式可得 $\nabla_l k=0$。

6. （1）将给定式展开之。

（2）运用（1）的不等式。

7. $H_{ji}N=\partial^2 x/\partial u^j\partial u^i-\left\{\begin{matrix}h\\ ji\end{matrix}\right\}x_h$,

$$\therefore\quad hN=g^{ji}(\partial^2 x/\partial u^j\partial u^i-\left\{\begin{matrix}h\\ ji\end{matrix}\right\}x_h)$$

$\therefore hN_x=\Delta x$，$hN_y=\Delta y$，$hN_z=\Delta z$。故当 $h=0$ 时 $\Delta x=\Delta y=\Delta z=0$。

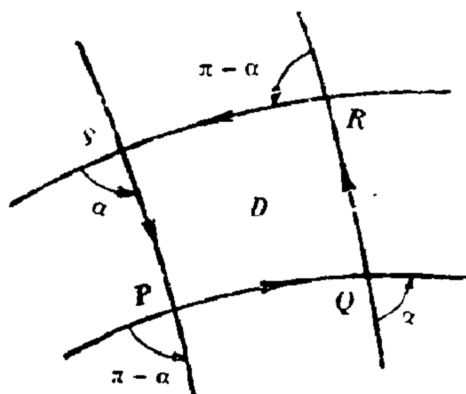
8. （1），（2），（3），（4），（5），（6）易证。

9. （1）$0=g^{ji}(\nabla_j X_i+\nabla_i X_j)=2\mathrm{div}X$

(2) $0=\nabla_k(\nabla_j X_i+\nabla_i X_j)=\nabla_j\nabla_k X_i-R_{kji}{}^h X_h+\nabla_i\nabla_k X_j$
$-R_{kij}{}^h X_h=-\nabla_j\nabla_i X_k-\nabla_i\nabla_j X_k-R_{kji}{}^h X_h-R_{kij}{}^h X_h=-2\nabla_j\nabla_i X_k$
$+R_{ijk}{}^h X_h-R_{kji}{}^h X_h-R_{kij}{}^h X_h=-2\nabla_j\nabla_i X_k-2R_{kij}{}^h X_h=-2(\nabla_j\nabla_i X_k$
$+R_{hjik}X^h)$。

$\therefore\ \nabla_j\nabla_i X^h+R_{kji}{}^h X^k=0$。

10. 如右图所示，包含于给定测地线族的测地线所围成四边形 $PQRS$，适用高斯·崩尼定理 5.18 得



$$\iint_D K d\sigma=2\pi-(\alpha+(\pi-\alpha)+\alpha+(\pi-\alpha))=0$$

故 $K=0$。式中设测地线族的一定夹角为 α。

11. 高斯·崩尼定理 5.18 适用于 c_1 与 c_2^{-1} 所围二角形，则

$$\iint_D K d\sigma=2\pi-(\pi-\alpha)-(\pi-\beta)=\alpha+\beta>0.$$

此不等式与 $K<0$ 矛盾。

12. 与习题五之 11 一样，

$$\iint_D K d\sigma=\alpha>0$$

这和不等式 $K<0$ 矛盾。

第　六　章

§39 **【问题 39.1】** 容易。

习　题　六

1. (1)，(2)，(3) 运用高斯·崩尼定理 6.8 以及 $\chi(M)=2(1-p)$。

2. (1) $\int_M \Delta f d\sigma=\int_M \mathrm{div} X d\sigma=0$。式中 $X=(g^{hi}\partial_i f)\partial/\partial x^h$。

(2) 显然。

(3) 运用格林定理 6.17 以及 (1) 与 (2) 。

(4) 运用 (3) 。

(5) 运用 (1) 证明 $\Delta f=0$。运用 (3) 证明 $df=0$。

3. (1)，(2) 运用习题五之 7 (p. 212)

(3) 运用 (2) 以及上例习题六之 2 (5) 。

4. (1)，(2)，(3)，(4) 运用 $d(\omega\wedge\pi)=d\omega\wedge\pi+(-1)^{p}\omega\wedge d\pi$。

5. (1) $\langle\omega,\ \pi\rangle=\int_M(\omega,\ d\theta)d\sigma \quad (\theta\in C^{p+1})$

$$\therefore \quad \langle\omega,\ \pi\rangle=\int_M(d\omega,\ \theta)d\sigma=\int_M(0,\ \theta)d\sigma=0。$$

(2)，(3) 和 (1) 一样。

索 引

(按汉语拼音排列)

E

F

G